

**UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**MESTRADO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES**

**JULIO CESAR SOUZA DO ROSARIO**

**APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL  
DE SINAIS PARA SÍNTESE DE ANTENAS COM MENOR  
NÚMERO DE ELEMENTOS.**

**Niterói - RJ**

**2012**

JULIO CESAR SOUZA DO ROSARIO

APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL  
DE SINAIS PARA SÍNTESE DE ANTENAS COM MENOR  
NÚMERO DE ELEMENTOS.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia de Telecomunicações da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Processamento de Sinais.

Orientador: Prof. Dr. JACQUELINE PEREIRA SILVA

Niterói - RJ

2012

JULIO CESAR SOUZA DO ROSARIO

APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DE PROCESSAMENTO DIGITAL  
DE SINAIS PARA SÍNTESE DE ANTENAS COM MENOR  
NÚMERO DE ELEMENTOS.

Dissertação apresentada ao Curso de  
Mestrado em Engenharia de  
Telecomunicações da Universidade  
Federal Fluminense como requisito  
parcial para obtenção do Grau de Mestre.  
Área de concentração: Processamento de  
Sinais.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. JACQUELINE PEREIRA SILVA  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. LENI JOAQUIM MATOS  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. LISANDRO LOVISOLO  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Niterói - RJ

2012

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus, pois minha fé nEle é um dos pilares de minha vida. Ela me dá forças para perseverar nos momentos difíceis e me faz acreditar que até os problemas mais complexos possuem solução.

À minha incrível professora orientadora por sua paciência e compreensão quase infinitas comigo, sem as quais não teria chegado até aqui. Prestatividade e vontade de ajudar nunca faltaram nestes anos de Mestrado (e nem na graduação quando fui seu aluno). Sinto-me honrado por ter sido orientado por ela e agradeço de coração por tudo que ela fez por mim.

À minha família tão importante ao longo desta caminhada, afinal de contas era o tempo dela que eu “roubava” para me dedicar aos estudos. Agradeço pelo apoio, suporte e incentivo ao longo desta jornada. Em momentos em que nem eu acreditava mais ser capaz de finalizar o trabalho, me apoiavam e me incentivavam a seguir em frente. Agradeço em especial as quatro mulheres mais importantes da minha vida, minha filha, minha esposa e minhas duas irmãs. E dedico à memória de minha mãe que foi tão importante ao longo da minha vida escolar.

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Diagramas Vertical, Horizontal e sua Composição para a Antena Dipolo de Meia-Onda. ....	10
Figura 2.2 – Diagrama de campo.....	11
Figura 2.3 – Diagrama Polar.....	11
Figura 2.4 – Antena Operando em Modo de Transmissão.....	13
Figura 2.5 – Circuito Equivalente Thevenin .....	14
Figura 2.6 – Antena em Modo de Recepção .....	15
Figura 2.7 – Equivalente Thevenin de uma Antena em modo de recepção .....	16
Figura 2.8 – Diagrama de Irradiação da Antena Dipolo Infinitesimal na forma cartesiana .....	19
Figura 2.9 – Diagrama de Irradiação da Antena Dipolo Infinitesimal na forma polar .....	20
Figura 2.10 – Diagrama de Irradiação da Antena Dipolo Infinitesimal na forma 3D .....	21
Figura 2.11 – Diagrama de Irradiação Cartesiano da Antena dipolo para $l=[\lambda/4, \lambda/2$ e $\lambda]$ .....	23
Figura 2.12 – Diagrama de Irradiação Polar da Antena dipolo para $l=[\lambda/4, \lambda/2$ e $\lambda]$ .....	24
Figura 2.13 - Geometria de campo distante de um conjunto linear de $N$ elementos .....	25
Figura 2.14 – Diagrama cartesiano de campo para o fator de conjunto .....	26
Figura 2.15 – Diagrama polar de campo para o fator de conjunto .....	27
Figura 2.16 – Diagrama cartesiano de campo para o fator de conjunto .....	28
Figura 2.17 – Diagrama polar de campo para o fator de conjunto .....	28
Figura 2.18 – Diagrama cartesiano de campo para o fator de conjunto .....	29
Figura 2.19 – Diagrama polar de campo para o fator de conjunto .....	29
Figura 3.1 – Representação gráfica de $g(t)$ no domínio da frequência.....	32
Figura 3.2 – Representação de $x[n]$ no domínio da frequência.....	32
Figura 3.3 – Gráfico de $g(t)$ e $g_q(t) \times t$ .....	34
Figura 3.4 – Um Sistema LTI discreto no tempo. ....	36
Figura 3.5 – Curva típica de um filtro passa-baixas ideal .....	49
Figura 3.6 – Curva típica de especificação de filtros passa-baixa.....	49
Figura 3.7 – Filtro FIR Passa Baixas de ordem 21.....	53
Figura 3.8 – Filtro FIR Passa Baixas de ordem 101 .....	54
Figura 4.1 – $E_{\text{eff}}(x)$ para $R = 2$ e $S = 8$ (azul) e $E_{\text{eff}}(x)$ para $R = 2$ e $S = 16$ (verde) ..	69
Figura 4.2 – $E_{\text{eff}}(x)$ para $R = 2$ e $S = 8$ (azul) e $E_{\text{eff}}(x)$ para $R = 8$ e $S = 8$ (verde) ..	70

Figura 4.3 – $E_{\text{eff}}(x)$ para $R = 2$ e $S = 16$ (azul) e $E_{\text{eff}}(x)$ para $R = 8$ e $S = 8$ (verde)	70
Figura 4.4 – Grade com $M \times N$ elementos de antenas.....	73
Figura 5.1 – Curva da equação (5.1) para $N = 30$ que será interpolada .....	76
Figura 5.2 – Curva Modelo (verde) x Curva Obtida via Interpolação (azul) .....	81
Figura 5.3 – Diferença entre a curva obtida via Síntese e a Curva Modelo .....	82
Figura 5.4 – Curva da equação (5.1) para $N = 4$ .....	83
Figura 5.5 – Curva Modelo (verde) x Curva Obtida via Interpolação (azul) .....	84
Figura 5.6 – Diferença entre a curva obtida via Síntese e a Curva Modelo .....	85
Figura 5.7 – Diagrama de Irradiação de Potência no Espaço .....	86
Figura 5.8 – Projeção no plano $xy$ do Diagrama de Potência .....	87
Figura 5.9 – Projeção no plano $yz$ do Diagrama de Potência .....	87
Figura 5.10 – Curva de $E_{\text{eff}}(x)$ (em azul) e curva modelo (em verde).....	88
Figura 5.11 – Distribuição de Corrente por cada Elemento de Antena. ....	89
Figura 5.12 – $E_T(x)$ (curva azul) e $E_R(x)$ (curva verde) .....	90
Figura 5.13 – Curva de $E_{\text{eff}}(x)$ (em azul) e curva modelo (em verde).....	91
Figura 5.14 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Transmissão .....	92
Figura 5.15 – Projeção Horizontal (plano $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_T(x,y)$ .....	93
Figura 5.16 – Projeção Vertical (plano $yz$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_T(x,y)$	93
Figura 5.17 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Recepção .....	94
Figura 5.18 – Projeção Horizontal (plano $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_R(x,y)$ .....	94
Figura 5.19 – Projeção Vertical (plano $yz$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_R(x,y)$	95
Figura 5.20 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante.....	96
Figura 5.21 – Projeção Horizontal (plano $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_{\text{eff}}(x,y)$ .....	97
Figura 5.22 – Projeção Vertical (plano $yz$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_{\text{eff}}(x,y)$	96
Figura 5.23 – Curva de $E_{\text{eff}}(x)$ (em azul) e curva modelo (em verde).....	99
Figura 5.24 – Curva da equação (5.1) para $N = 110$ .....	102
Figura 5.25 – Curva Modelo (azul) x Curva Obtida via Interpolação (verde) .....	113
Figura 5.26 – Curva de $E_{\text{eff}}(x)$ (em azul) e curva modelo (em verde).....	114
Figura 5.27 – Distribuição de Corrente por Elemento de Antena. ....	116
Figura 5.28 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Transmissão .....	117

Figura 5.29 – Projeção Horizontal (plano $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_T(x,y)$ .....	117
Figura 5.30 – Projeção Vertical (plano $yz$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_T(x,y)$ .....	118
Figura 5.31 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Recepção .....	118
Figura 5.32 – Projeção Horizontal (plano $zx$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_R(x,y)$ .....	119
Figura 5.33 – Projeção vertical (plano $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de $E_R(x,y)$	119
Figura 5.34 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante.....	120
Figura 5.35 – Projeção $xz$ do Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante .....	120
Figura 5.36 – Projeção $yz$ do Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante .....	121

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Equações de Maxwell (forma Diferencial).....	5
Tabela 2.2 – Equações de Maxwell (forma Integral) .....	5
Tabela 3.1 – Principais propriedades da transformada Z .....	42
Tabela 3.2 – Transformações para um filtro passa-baixa com frequência de corte $\omega_c$ .....	58
Tabela 3.3 – Comparativo entre as funções janela fixas. ....	55
Tabela 5.1 – Valores da Função amostra $G(x_i)$ .....	77
Tabela 5.2 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese ...	82
Tabela 5.3 – Valores da Função amostra $G(x_i)$ .....	83
Tabela 5.4 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese ...	85
Tabela 5.5 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese ...	89
Tabela 5.6 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese ...	99
Tabela 5.7 – Valores da Função amostra $G(x_i)$ .....	103
Tabela 6.1 – Comparativo entre os Métodos.....	124

## Sumário

<b>AGRADECIMENTOS.....</b>	<b>4</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>5</b>
<b>Lista de Tabelas.....</b>	<b>8</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>12</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>13</b>
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceitos Básicos de Antenas .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Definição de Antena.....</b>	<b>4</b>
<b>2.2. Equações da Antena.....</b>	<b>4</b>
<b>2.2.1. Equações de Maxwell .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2.2. Equação da Antena Dipolo Elétrico Infinitesimal .....</b>	<b>6</b>
2.2.2.1. Características do Campo Elétrico de um dipolo infinitesimal, alimentado por uma corrente constante .....	7
<b>2.2.3. Vetor de Poynting .....</b>	<b>9</b>
<b>2.3. Características de uma Antena.....</b>	<b>9</b>
<b>2.3.1. Diagrama de Irradiação.....</b>	<b>9</b>
<b>2.3.2. Diretividade .....</b>	<b>10</b>
<b>2.3.3. Largura de banda.....</b>	<b>10</b>
<b>2.3.4. Nível de Lobo Lateral (NLL) .....</b>	<b>12</b>
<b>2.3.5. Polarização.....</b>	<b>12</b>
<b>2.3.6. Frequência de Operação .....</b>	<b>13</b>
<b>2.3.7. Impedância de Entrada .....</b>	<b>13</b>
<b>2.4. Antenas Filamentares.....</b>	<b>17</b>
<b>2.4.1. Dipolo Infinitesimal .....</b>	<b>17</b>
2.4.1.1. Equações de Campo Eletromagnético.....	17
2.4.1.2. Diagrama de Irradiação.....	19
2.4.1.3. Diretividade .....	21
2.4.1.4. Largura de Banda .....	22
<b>2.4.2. Dipolos de Comprimento Finito.....</b>	<b>22</b>
2.4.2.1. Equações de Campo Eletromagnético.....	23
2.4.2.2. Diagramas de Irradiação .....	23

2.5.	Conjuntos de Antenas.....	24
2.5.1.	Efeito Causado pela variação da defasagem progressiva de corrente.....	26
2.5.2.	Efeito Causado pela variação da distância entre os elementos.....	27
2.5.3.	Efeito Causado pela variação no número de elementos.....	29
3.	Teoria de Processamento de Sinais .....	31
3.1.	Teoria de Sinais Discretos .....	31
3.1.1.	Teorema de Nyquist [5].....	31
3.1.2.	Quantização .....	33
3.2.	Teoria de Transformadas Discretas .....	35
3.2.1.	Transformada de Fourier de Tempo de Discreto (DTFT).....	35
3.2.1.1.	Atraso de Grupo.....	36
3.2.2.	Transformada Discreta de Fourier (DFT) .....	36
3.2.2.1.	Forma Matricial.....	37
3.2.2.2.	Convolução Circular .....	38
3.2.2.3.	Propriedades da Transformada Discreta de Fourier.....	39
3.2.3.	Transformada Z.....	40
3.2.4.	Função de Transferência.....	43
3.3.	Teoria de Filtros Discretos.....	43
3.3.1.	Filtros de Fase Linear.....	44
3.3.2.	Filtros Digitais Simples.....	46
3.4.	Construção de Filtros Digitais .....	48
3.4.1.	Especificação de um Filtro Digital .....	48
3.4.2.	Construção de um Filtro FIR .....	50
3.4.2.1.	Construção de Filtros FIR baseado em Truncamento de Série de Fourier .....	51
3.4.3.	Construção de um Filtro IIR.....	55
3.4.3.1.	Método da Transformação Bilinear.....	56
3.4.3.2.	Transformações de Espectro de Filtros IIR.....	57
3.5.	Considerações Finais.....	58
4.	Técnicas de Síntese de Antenas.....	59
4.1.	Introdução à Síntese de Antenas .....	59
4.2.	Métodos de Síntese Baseados na Teoria Eletromagnética ...	60
4.2.1.	Método da Interpolação .....	62
4.2.1.1.	Interpolação Polinomial.....	62

4.2.1.2.	Interpolação Trigonométrica .....	63
4.2.2.	<b>Método da Transformada Inversa de Z [8]</b> .....	64
<b>4.3.</b>	<b>Métodos de Síntese baseados na Teoria de Processamento de Sinais [3], [7] e [11]</b> .....	66
4.3.1.	<b>Conceito de Arrays Espaçados</b> .....	67
4.3.2.	<b>Método da Função de Abertura Linear</b> .....	68
4.3.3.	<b>Método da Função de Abertura Staircase [11]</b> .....	70
4.3.3.1.	Números de Elementos Pares .....	71
4.3.3.2.	Números de Elementos Ímpares .....	71
<b>4.4.</b>	<b>Conjuntos Planares</b> .....	71
4.4.1.	<b>Construção de um Conjunto Planar</b> .....	72
<b>5.</b>	<b>Implementação das Técnicas de Síntese de Antenas ...</b>	<b>75</b>
<b>5.1.</b>	<b>Antenas para Uso em Radar</b> .....	75
5.1.1.	<b>Método da Interpolação Polinomial</b> .....	76
5.1.1.1.	Diagrama Horizontal .....	76
5.1.1.2.	Diagrama Vertical .....	82
5.1.1.3.	Campo Resultante no Espaço .....	85
5.1.2.	<b>Método da Função de Abertura Linear</b> .....	88
5.1.2.1.	Diagrama Horizontal .....	88
5.1.2.2.	Diagrama Vertical .....	90
5.1.2.3.	Campo Resultante no Espaço .....	91
5.1.3.	<b>Comparação entre os Métodos</b> .....	97
<b>5.2.</b>	<b>Antenas para Uso em Satélite</b> .....	101
5.2.1.	<b>Método da Interpolação Polinomial</b> .....	102
5.2.1.1.	Diagrama Horizontal .....	102
5.2.1.2.	Diagrama Vertical .....	113
5.2.1.3.	Campo Resultante no Espaço .....	114
5.2.2.	<b>Método da Função de Abertura Linear</b> .....	114
5.2.2.1.	Diagrama Horizontal .....	114
5.2.2.2.	Diagrama Vertical .....	116
5.2.2.3.	Campo Resultante no Espaço .....	116
<b>6.</b>	<b>Conclusão</b> .....	<b>123</b>
<b>6.1.</b>	<b>Considerações Finais</b> .....	123
<b>6.2.</b>	<b>Trabalhos Futuros</b> .....	125
	<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>127</b>

## **RESUMO**

O trabalho tem como principal objetivo a aplicação das técnicas de processamento de sinais no estudo de síntese de antenas. É possível reduzir o número de elementos utilizados em um conjunto de antenas com uma pequena alteração no diagrama de irradiação, com o auxílio de técnicas de processamento de sinais. Uma motivação para este estudo é a oportunidade de unir teorias de linhas de pesquisa diferentes, o que torna o assunto mais interessante e desafiador. Foi feito o estudo da base teórica de antenas e processamento de sinais, para, em seguida, estudar dois métodos de síntese de antenas, um utilizado apenas a teoria clássica de antenas e outro utilizando a teoria de processamento de sinais. Por fim, serão feitas simulações com o intuito de estudar o comportamento de ambos os métodos em situações de uso prático, ou seja, aplicação do método para a síntese de antenas que possuem uso prático, como antenas utilizadas em sistemas de radar. Com os resultados da simulação será possível comparar o desempenho de ambos os métodos.

Palavras-chave: Síntese de Antenas; Processamento de Sinais; Interdisciplinaridade; Redução do Número de Elementos; Simulação; Comparação de Métodos.

## **ABSTRACT**

The main purpose of this work is the application of signal processing techniques on the synthesis of antenna. It is possible to reduce the number of antenna elements used on an array with a small change on the diagram pattern, using signal processing techniques. One of the main motivation to start this work is the opportunity to join theories of two different research fields which makes the subject even more interesting and challenger. First of all, it was made a research about the antenna and signal processing theory, and after that, it will be studied two different methods of synthesis of antenna, one of them using only the classic antenna theory and another one using the theory of signal processing. At the end, it will be run some computer simulations to study the behavior of both methods in practical situations, in another words, use the methods to simulate the creation of an antenna with practical use, according some specifications, as radar's antennas. With the simulation results, it will be possible compare the performance of both methods.

**Keywords:** Synthesis of Antenna; Signal Processing; Antenna Elements Decrease; Simulation; Method Comparison.

# 1. Introdução

Antena é o dispositivo cuja função é transformar energia eletromagnética guiada pela linha de transmissão em energia eletromagnética irradiada, pode-se também dizer que esta definição serve no sentido inverso, isto é, transformar energia eletromagnética irradiada em energia eletromagnética guiada para a linha de transmissão. Portanto, sua função é primordial em qualquer comunicação por radiofrequências.

As primeiras antenas, presume-se, foram criadas por Heinrich Hertz, em 1886, com a finalidade de auxiliar no estudo e desenvolvimento da teoria eletromagnética. Hertz pesquisou diversos dispositivos durante a realização de seus experimentos para testar e provar a teoria eletromagnética, esta proposta pelo matemático e físico Maxwell. As primeiras antenas que se tem notícia foram produzidas por Hertz. Na verdade eram duas placas de metal conectadas a dois bastões metálicos. Estes dispositivos eram ligados a duas esferas, e estas separadas entre si por uma distância pré-determinada. Às esferas era acoplada uma bobina que gerava descargas por centelhamento. As centelhas por sua vez, ao atravessar o espaço entre esferas, produziam ondas eletromagnéticas oscilatórias nos bastões [1].

À medida que os sistemas de transmissão se tornavam mais complexos, se tornava necessária a construção de antenas melhores e mais eficientes. Por volta de 1905, Karl Ferdinand Braun demonstrou a melhora na transmissão de ondas de rádio em uma dada direção ao se utilizar um conjunto linear de antenas. Durante a Segunda Guerra Mundial foram construídos os primeiros radares utilizando conjunto linear de antenas [2].

Para atender as especificações de irradiação de um sistema de ultrassom moderno seria necessária a utilização de um conjunto planar de antenas de 64x64 elementos [3], ou seja, mais de 4000 elementos de antenas seriam necessários e quanto maior o número de elementos necessários, maior o custo de fabricação/produção do conjunto. Daí surgiu a necessidade de se desenvolver métodos de síntese de antenas capazes de obter conjuntos de antenas que atendessem as especificações dadas com menos elementos, isto é, uma solução de menor custo que atenda a um dado problema.

Baseado nisso, o presente trabalho tem como principal objetivo mostrar como é possível construir conjuntos de antenas com menos elementos, utilizando técnicas de processamento de sinais. Para isso, os dois primeiros capítulos do desenvolvimento abordarão as partes teóricas de antenas e processamento de sinais respectivamente.

No capítulo de teoria de antenas serão estudados conceitos importantes como: o campo elétrico irradiado por uma antena no espaço, antenas dipolo elétrico, as principais características de uma antena (largura de banda, nível de lobo lateral, etc), equações de campo eletromagnético de antenas dipolo, conjunto de antenas e os principais parâmetros que definem um conjunto [4].

No capítulo relativo ao processamento de sinais serão estudados conceitos importantes relativos à teoria de sinais discretos, como o Teorema de Nyquist e técnicas de quantização. Também serão vistas as principais transformadas utilizadas em sinais discretos (DTFT, DFT e transformada Z). Finalmente, será estudada, de forma mais minuciosa, a teoria de filtros discretos tanto IIR (*infinite impulse response* ou resposta infinita ao impulso) quanto FIR (*finite impulse response* ou resposta finita ao impulso), sendo este mais importante dentro do escopo do presente trabalho. Serão vistos, dentre outras coisas, os principais parâmetros desses filtros e algumas das principais técnicas de construção de ambos [5].

Munido desses conteúdos, no Cap. 4 serão estudados dois diferentes métodos de síntese de antenas. O primeiro deles tradicional, ou seja, baseado nas teorias clássicas de antenas [6]. O outro utiliza teoria de processamento de sinais, mais especificamente a teoria de construção de filtros FIR, pois, como será analisado mais adiante, a equação de campo eletromagnético de um conjunto de antenas é muito similar à equação de transferência de um filtro FIR, este método foi descrito baseando-se nos estudos apresentados em [6] e [7].

Por fim, no Cap. 5 os métodos estudados serão aplicados para dois diferentes conjuntos de especificações de antenas reais (antenas para uso em radar e para uso em satélite), através de uma simulação feita em Matlab, para que assim possa ser feita uma comparação entre os resultados obtidos por cada método.

A maior motivação para a realização deste trabalho é poder, de certa forma, contribuir para o contínuo avanço de estudos em uma área interdisciplinar onde não há uma quantidade grande de estudos divulgados, além de entender as principais diferenças entre os resultados obtidos pelos dois métodos, se há (e quais são as) situações em que os resultados obtidos na utilização de um método são mais robustos que o de outro.

Pretende-se que o presente trabalho sirva de base para trabalhos futuros nessa área, tanto no estudo de novas técnicas de síntese usando a teoria de processamento de sinais como base, quanto para o uso destas teorias na construção de antenas inteligentes que possuem larga aplicabilidade em radares.

## **2. Conceitos Básicos de Antenas**

### **2.1. Definição de Antena**

Uma antena pode ser definida como um elemento que faz a transição entre a propagação guiada e a propagação não-guiada [1] e [4]. A antena pode funcionar como um elemento transmissor ou receptor, dentro de um sistema de propagação. Em modo de recepção, ela será responsável por captar a energia contida em ondas eletromagnéticas e convertê-la em corrente elétrica. No modo de transmissão, ela faz o inverso: através de um padrão de corrente de alimentação gera ondas eletromagnéticas para serem transmitidas pelo ar.

As antenas são usadas nos mais diversos tipos de aplicações como rádio, televisão, radar, comunicação ponto a ponto, entre outros.

De uma forma mais genérica, a antena pode ser entendida como um elemento transdutor que irradia um campo eletromagnético gerado em resposta à tensão e à corrente aplicadas em sua entrada, assim como induz corrente e tensão em uma linha de transmissão quando inserida em um meio na presença de campo eletromagnético.

### **2.2. Equações da Antena**

#### **2.2.1. Equações de Maxwell**

As Equações de Maxwell são um grupo de quatro equações, assim chamadas em homenagem de James Clerk Maxwell, que descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético, bem como suas interações com a matéria [4].

As quatro equações de Maxwell expressam, respectivamente:

- Como cargas elétricas produzem campos elétricos (Lei de Gauss).
- A ausência experimental de cargas magnéticas.
- Como corrente elétrica produz campo magnético (Lei de Ampère).
- E como variações de campo magnético produzem campos elétricos (Lei da indução de Faraday).

A expressão matemática das equações de Maxwell pode ser vista nas Tabelas (2.1) e (2.2) abaixo:

**Tabela 2.1 – Equações de Maxwell (forma Diferencial)**

Lei de Gaus	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
Lei de Gaus para o magnetismo	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Lei da Indução de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Lei de Ampère + Extensão de Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

**Tabela 2.2 – Equações de Maxwell (forma Integral)**

Lei de Gaus	$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q_{\text{englobado}} = \iiint_V \rho dV$
Lei de Gaus para o magnetismo	$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Lei da Indução de Faraday	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{s}$
Lei de Ampère + Extensão de Maxwell	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{englobado}} + \frac{d\Phi_D}{dt}$

Onde:

$\rho$  é a densidade volumétrica de carga elétrica (unidade SI: coulomb por metro cúbico), não incluindo dipolos de cargas ligadas no material.

$B$  é a densidade superficial de fluxo magnético (unidade SI: tesla), também chamada de indução magnética.

$D$  é o campo elétrico de deslocamento ou densidade superficial de campo elétrico (unidade SI: Coulomb por metro quadrado).

$E$  é a intensidade de campo elétrico (unidade SI: volt por metro).

$H$  é a intensidade de campo magnético (unidade SI: ampère por metro).

$J$  é a densidade superficial de corrente elétrica (unidade SI: ampère por metro quadrado).

Vale dizer também que para meios lineares, tem-se:

$$D = \varepsilon E \text{ e } B = \mu H \quad (2.1)$$

onde:

$\epsilon$  é a constante dielétrica ou permissividade elétrica.

$\mu$  é a permeabilidade magnética.

Quando o meio é isotrópico e homogêneo,  $\mu$  e  $\epsilon$  são escalares e constantes, sendo assim, nas equações de Maxwell  $D$  e  $B$  podem ser substituídos por  $E$  e  $H$  como na equação acima.

Através das equações de Maxwell pode-se calcular o comportamento do campo elétrico irradiado por uma determinada antena em função da corrente elétrica que a alimenta ou vice-versa. A dedução destas equações está fora do escopo deste trabalho, que tem como principal objetivo estudar como reduzir o número de elementos de um conjunto de antenas usando técnicas de processamento de sinais. Portanto na próxima seção estas equações serão apresentadas e analisadas, mas sem suas deduções.

### 2.2.2. Equação da Antena Dipolo Elétrico Infinitesimal

Para que se possam obter soluções matemáticas, através da resolução das equações de Maxwell, que possuam algum significado físico, é importante que sejam considerados campos elétricos produzidos por fontes fisicamente realizáveis.

O elemento mais simples que pode ser analisado como uma antena é o dipolo infinitesimal [4], por dipolo infinitesimal pode-se entender como um dipolo de dimensões (comprimento e raio) desprezíveis. Um dipolo elétrico é formado por duas cargas variantes no tempo que possuem magnitudes iguais e sinais opostos ligadas por um filamento onde flui corrente. As equações que descrevem o comportamento do campo elétrico, dadas em coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  para uma antena dipolo elétrico infinitesimal alimentado por uma corrente de módulo constante, são:

$$E_{\theta} = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{-w \sin(wt)}{rc^2} + \frac{\cos(wt)}{r^2c} + \frac{\sin(wt)}{wr^3} \right] \quad (2.2a)$$

$$E_r = \frac{2Idl \cos \theta}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\cos(wt)}{r^2c} + \frac{\sin(wt)}{wr^3} \right] \quad (2.2b)$$

$$E_{\phi} = 0 \quad (2.2c)$$

A partir do campo elétrico e com o uso das equações de Maxwell obtemos, para o campo magnético, a seguinte equação:

$$H_{\phi} = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi} \left[ \frac{-\sin(\omega t)}{rc} + \frac{\cos(\omega t)}{r^2} \right] \quad (2.3)$$

### 2.2.2.1. Características do Campo Elétrico de um dipolo infinitesimal, alimentado por uma corrente constante

Conforme visto, o campo elétrico gerado por um dipolo elétrico infinitesimal possui componente radial e componente em  $\theta$ .

O campo pode ser separado da seguinte forma: As parcelas que sofrem atenuação com a distância em função de  $r^3$ ,  $r^2$  e  $r$ , de forma que:

$E(r, \theta) = E_1(r, \theta) + E_2(r, \theta) + E_3(r, \theta)$ , onde:

$$E_1(r) = 0 \quad (2.4a)$$

$$E_1(\theta) = K_1 \frac{-\omega \sin(\omega t - r/c) \sin(\theta)}{c^2 r} \quad (2.4b)$$

$$E_2(r) = K_2 \frac{\cos(\omega t - r/c) \cos(\theta)}{c r^2} \quad (2.4c)$$

$$E_2(\theta) = K_1 \frac{\cos(\omega t - r/c) \sin(\theta)}{c r^2} \quad (2.4d)$$

$$E_3(r) = K_2 \frac{\sin(\omega t - r/c) \cos(\theta)}{\omega r^3} \quad (2.4e)$$

$$E_3(\theta) = K_1 \frac{\sin(\omega t - r/c) \sin(\theta)}{\omega r^3} \quad (2.4f)$$

$$\text{com } K_1 = \frac{Idl}{4\pi\epsilon} \text{ e } K_2 = \frac{2Idl}{4\pi\epsilon}.$$

Neste contexto  $E_3$  é a parcela do campo elétrico chamado de campo muito próximo ou campos eletrostáticos [4]. São assim chamados porque existem

apenas em regiões muito próximas da origem. Sua intensidade cai em função de  $r^3$ , à medida que  $r$  aumenta a intensidade de  $E_3$  cai mais rapidamente que a intensidade das outras parcelas do campo, por este motivo é conhecido como campo muito próximo, isto é, seu efeito só pode ser sentido em regiões muito próximas à antena. É também chamado de campo eletrostático, pois a sua equação, não coincidentemente, se assemelha à equação de um campo produzido por um dipolo elétrico eletrostático cujo modulo das cargas não varia com o tempo.

$E_2$  é a parcela do campo elétrico chamado de campo próximo, ou campo de indução, sua intensidade decai em função de  $r^2$ , por isso são chamados de campos próximos [4]. Sua influência é sentida em regiões mais próximas da antena (porém não tão próximas quanto para o caso de  $E_3$ ), quando  $r$  se torna maior sua contribuição começa a ficar desprezível em relação à contribuição dada por  $E_1$ . Uma característica do campo elétrico na região de indução é a complexidade para se identificar a relação entre os campos Elétrico e Magnético.

Por sua vez,  $E_1$ , chamado de campo distante, ou campo de radiação [4], é a parcela mais importante do campo elétrico estudado. Esta parcela é importante porque, para a maior parte das aplicações das antenas, a região de interesse pode ser considerada longe o suficiente, de forma que a contribuição das outras parcelas do campo elétrico possa ser desprezada em relação à  $E_1$ . O desenvolvimento deste trabalho irá se concentrar na equação do campo elétrico distante, que são os campos considerados para aplicações práticas de radar e satélites.

Seja  $R$  a distância da antena a um determinado ponto do espaço,  $D$  a maior dimensão da antena e  $\lambda$  o comprimento de onda, as regiões definidas como as regiões de predominância de cada subtipo de campo são [4]:

- Se  $R \leq 0,62\sqrt{D^3/\lambda}$ , a região é chamada região de campo muito próximo.
- Se  $0,62\sqrt{D^3/\lambda} \leq R \leq 2D^2/\lambda$ , a região é chamada região de campo próximo.

- Se  $R \geq 2D^2/\lambda$ , a região é chamada região de campo distante.

### 2.2.3. Vetor de Poynting

O vetor de Poynting define o fluxo de potência por unidade de área, em um ponto específico do espaço, definido por:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.5)$$

Dessa forma, a potência irradiada por uma antena é dada por:

$$P = \iint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad (2.6)$$

## 2.3. Características de uma Antena

### 2.3.1. Diagrama de Irradiação

São gráficos de distribuição do campo elétrico (ou potência) irradiada por uma potência. O diagrama mostra como uma antena (ou um conjunto) irradia campo elétrico (ou potência) em função de  $\theta$  (plano vertical),  $\varphi$  (plano horizontal) ou tridimensional. A Figura (2.1) mostra os diagramas V e H de uma antena dipolo vertical de meia-onda e o diagrama espacial. Podem ser do tipo diagrama de campo ou de potência, sendo este calculado pelo quadrado do campo. Em geral são chamados de diagramas de campo e de padrões de potência, respectivamente.

As antenas que possuem um diagrama de irradiação em forma de círculo, em um determinado plano, ou seja, que irradiam igualmente em todas as direções naquele plano são ditas Omnidirecionais. Para o caso especial em que a antena tem ambos os diagramas V e H Omnidirecionais, a antena é dita Isotrópica, ou seja, ela irradia uniformemente em todas as direções de propagação no espaço.

Na Figura (2.1) a antena é Omnidirecional no plano horizontal, enquanto no seu plano vertical, ela concentra a energia irradiada em uma determinada faixa angular.

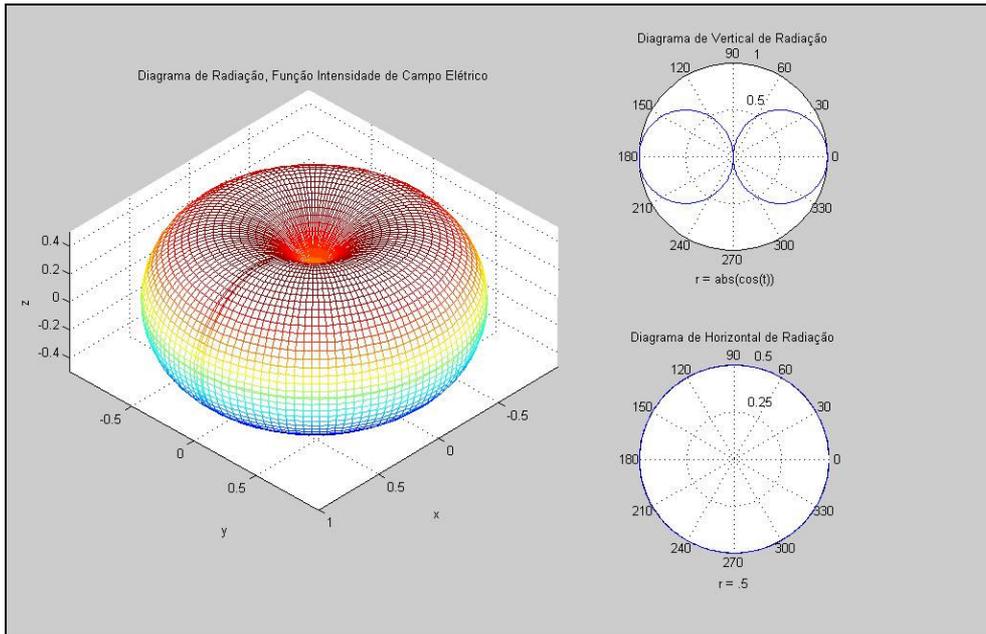


Figura 2.1 – Diagramas Vertical, Horizontal e sua Composição para a Antena Dipolo de Meia-Onda [8].

### 2.3.2. Diretividade

A diretividade de uma antena é, sem dúvida, uma de suas características mais importantes. É definida como a quantidade de energia (ou potência) que a antena irradia em sua direção de máximo pela densidade de energia (ou potência) que ela libera. Em outras palavras é o ganho do conjunto analisado em sua direção de máxima irradiação em relação à uma antena omnidirecional no dado plano de irradiação, alimentada com a mesma potência. Matematicamente, a diretividade é definida como:

$$D = \frac{4\pi |E(\theta, \varphi)_{\text{máx}}|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |E(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi} \quad (2.7)$$

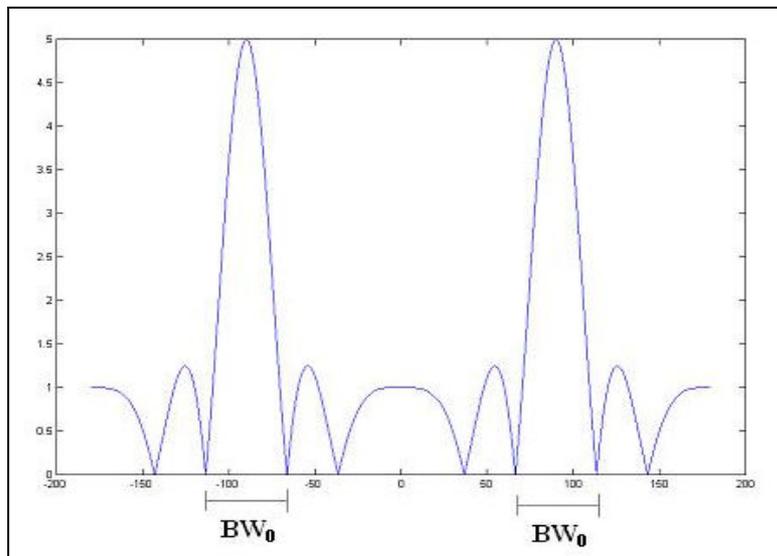
Assim, pode-se também dizer que a diretividade é uma medida de quanto a antena concentra a energia de alimentação na direção de máxima irradiação.

### 2.3.3. Largura de banda

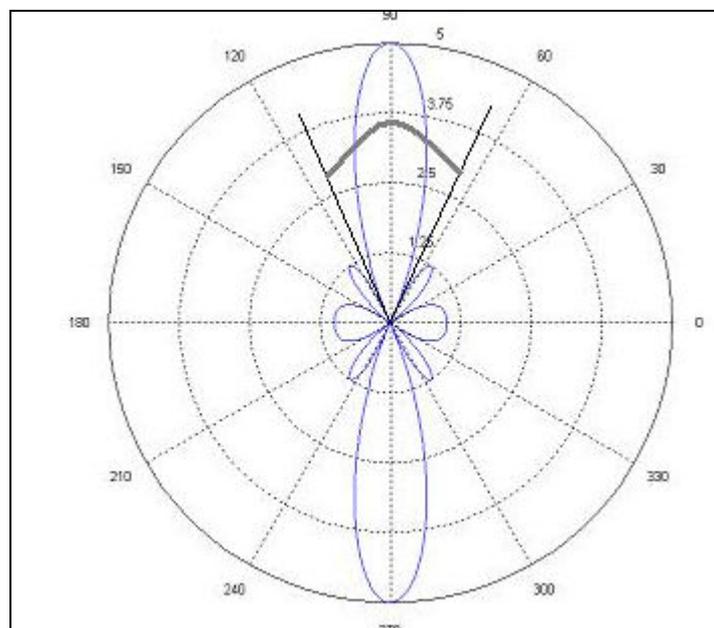
A Largura de Banda também é uma das principais características de uma antena, ela determina a abertura angular em torno da direção de máximo na

qual a antena irradia energia até um determinado nível. Os dois tipos principais de definição de largura de banda são:

- a) *Largura de banda entre nulos ( $BW_0$ )*: É a diferença entre a posição angular dos nulos adjacentes à direção de máxima irradiação. As Figuras (2.2) e (2.3) mostram, respectivamente, um diagrama cartesiano e polar de um conjunto, detalhando a largura de banda entre nulos:



**Figura 2.2 – Diagrama de campo**



**Figura 2.3 – Diagrama Polar**

- b) *Largura de banda entre pontos de meia potência (HPBW ou  $BW$ )*: Essa medida é a diferença entre as posições angulares dos pontos onde a

potência vale a metade da máxima potência irradiada, correspondendo aos pontos de 3dB. Para calcular os ângulos de meia potência, basta calcular os pontos, tais que:

$$P_H = \frac{1}{2} P_{Max} \text{ ou } S_H = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{Max} \quad (2.8)$$

#### 2.3.4. Nível de Lobo Lateral (NLL)

É a relação entre a potência irradiada na direção do segundo maior máximo e a potência irradiada na direção de máximo. É uma medida do quanto a energia que deveria estar concentrada em uma determinada direção, se espalha para outra. O nível de lobo lateral pode ser definido como:

$$NLL = \frac{P_{Max}}{P_{LMax}}$$

onde:

$P_{Max}$  é o valor da potência irradiada na direção de máxima irradiação

$P_{LMax}$  é o maior valor de potência fora do lobo principal de irradiação.

#### 2.3.5. Polarização

Define-se como polarização da antena a orientação segundo a qual o vetor campo elétrico irradiado por ela oscila ao longo do tempo.

Os principais tipos de polarização são: vertical, horizontal, circular ou elíptica [4].

- Vertical: quando o vetor de campo elétrico varia na direção vertical, a onda é verticalmente polarizada. Isso ocorre quando a antena transmissora é instalada nesta direção.
- Horizontal: quando o vetor de campo elétrico varia na direção horizontal, a onda é horizontalmente polarizada. Nesse caso, a antena está instalada nessa direção.
- Circular: quando o vetor de campo elétrico mantém a mesma amplitude de campo elétrico e descreve uma trajetória circular ao redor da direção de propagação da onda.

- Elíptica: quando a amplitude do campo elétrico varia e o vetor de campo elétrico descreve uma trajetória elíptica ao longo da direção de propagação da onda.

### 2.3.6. Frequência de Operação

A frequência de operação de uma antena é a faixa de frequência onde o fabricante da antena é capaz de garantir, que os parâmetros da antena se mantêm iguais ou variam muito pouco em relação ao especificado. Na prática, é a faixa de frequência na qual a antena deve ser utilizada, ela depende dos materiais utilizados em sua construção [4].

### 2.3.7. Impedância de Entrada

A Impedância de entrada é definida como a impedância apresentada pela antena entre seus terminais ou a razão entre tensão e corrente entre um par de terminais, ou a razão entre componentes apropriadas de campo elétrico e magnético em um ponto.

A Figura (2.4) representa uma antena em modo de transmissão e a impedância de entrada da antena é definida como a razão entre a tensão e a corrente em a – b. A Equação (2.9) abaixo define a impedância de entrada da antena:

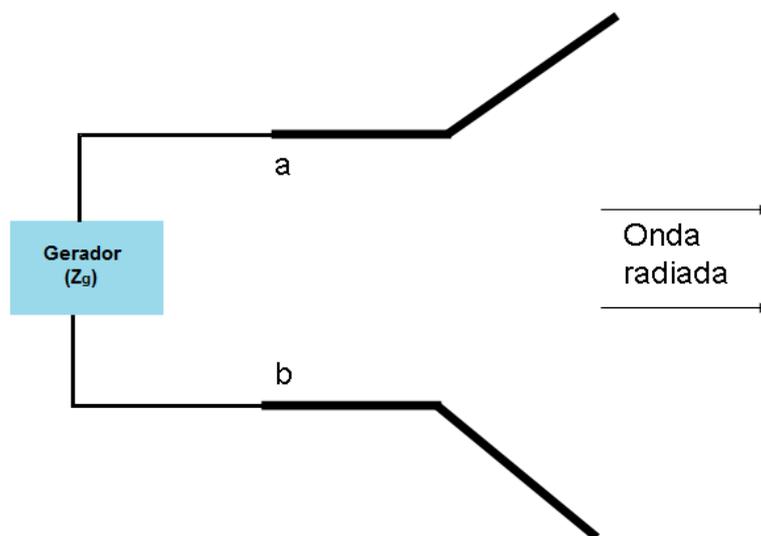


Figura 2.4 – Antena Operando em Modo de Transmissão [4]

$$Z_A = R_A + jX_A \quad (2.9)$$

Onde

$Z_A$  define a impedância da antena nos terminais a – b.

$R_A$  define a resistência da antena nos terminais a – b.

$X_A$  define a reatância da antena nos terminais a – b.

Em geral, a parte resistiva é dividida em duas componentes, de forma que:

$$R_A = R_r + R_L \quad (2.10)$$

Onde

$R_r$  define a resistência de radiação da antena.

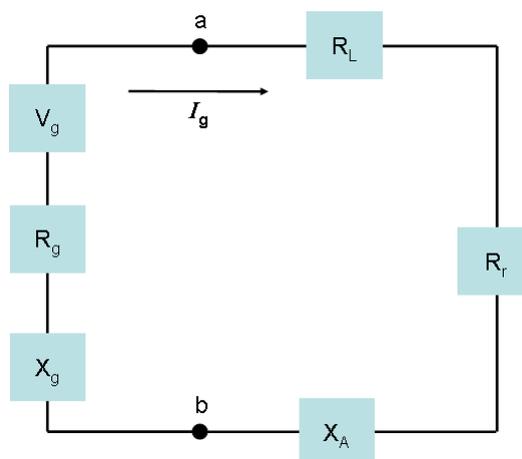
$R_L$  define a resistência de perda da antena.

O gerador da Figura (2.4), possui uma impedância interna  $Z_G$ , onde:

$$Z_G = R_G + jX_G \quad (2.11)$$

Com a antena sendo usada em modo de transmissão, o conjunto antena-gerador pode ser representado pelo circuito equivalente de Thevenin da Figura (2.5).

Dessa forma a corrente que flui do gerador para alimentar a antena,  $I_g$  é dada pela equação:



**Figura 2.5 – Circuito Equivalente Thevenin [4]**

$$I_g = \frac{V_g}{Z_t} = \frac{V_g}{Z_A + Z_g} = \frac{V_g}{(R_r + R_L + R_g) + j(X_A + X_g)} \quad (2.12)$$

Da mesma forma, a potência que é irradiada é dada pela seguinte equação:

$$P_r = \frac{1}{2} |I_g|^2 R_r \quad (2.13)$$

O cenário em que a maior parte da potência do gerador é entregue à antena ocorre quando há um casamento conjugado entre a impedância da antena e do gerador [4], ou seja:

$$R_r + R_L = R_g \text{ e } X_A = -X_g \quad (2.14)$$

Desta forma, seria eliminada a parte reativa da impedância e seriam reduzidos os efeitos de reflexão por descasamento de impedância.

Para o caso do casamento conjugado, a equação de  $P_r$  é:

$$P_r = \frac{|V_g|^2}{8} \left( \frac{R_r}{(R_r + R_L)^2} \right) \quad (2.15)$$

Para este mesmo caso, a equação que define a potência total entregue pelo gerador  $P_T$  é:

$$P_T = \frac{1}{2} V_g I_g^* = \frac{|V_g|^2}{4} \left( \frac{1}{R_r + R_L} \right) \quad (2.16)$$

Para o caso em que não há perdas na antena, ou seja,  $R_L = 0$ , temos que:

$$P_r = \frac{P_T}{2} \quad (2.17)$$

Conclui-se que para a melhor das situações, com uma antena sem perdas e as impedâncias da antena e gerador em casamento conjugado, a potência irradiada pela antena é metade da potência entregue pelo gerador ao sistema.

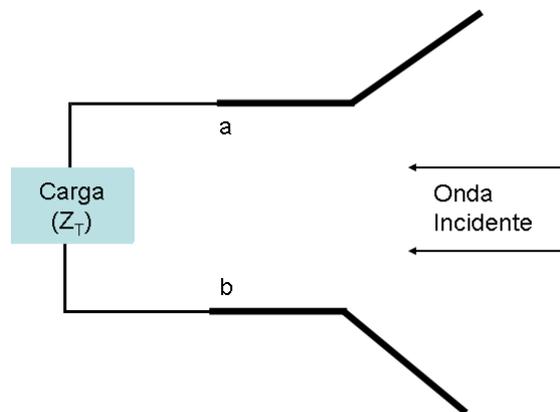


Figura 2.6 – Antena em Modo de Recepção [4]

Para uma antena operando em modo de recepção, como a da Figura (2.6), tem-se o seguinte circuito equivalente Thevenin da Figura (2.7).

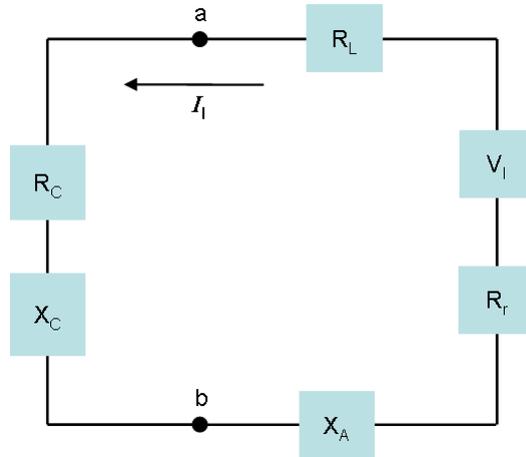


Figura 2.7 – Equivalente Thevenin de uma Antena em modo de recepção [4]

onde:

$V_I$  é a tensão induzida na linha de transmissão pela onda que incide na antena.

$I_I$  é a corrente de indução na malha, gerada pela tensão  $V_I$ .

$R_C, X_C$  são, respectivamente, as resistência e reatância da carga (linha de transmissão) conectada à antena.

$R_r, R_L, X_A$  representam os mesmos termos que representavam para a antena operando em modo de transmissão.

Pode-se notar que o circuito equivalente de Thevenin da antena operando em modo de recepção é muito similar ao da antena operando em modo de transmissão, o que torna a equação que define sua corrente muito similar a que define a corrente para uma antena operando em modo de transmissão, de modo que:

$$I_I = \frac{V_I}{Z_t} = \frac{V_I}{Z_A + Z_C} = \frac{V_I}{(R_r + R_L + R_C) + j(X_A + X_C)} \quad (2.18)$$

Dessa forma, a potência útil passada à linha de transmissão é a dissipada em  $R_C$ . Então, tem-se:

$$P_C = \frac{1}{2} |I_I|^2 R_C \quad (2.19)$$

Analogamente, também se pode demonstrar que o caso de maior eficiência se dá quando as cargas estão em modo de casamento conjugado [4], isto é:

$$R_r + R_L = R_C \text{ e } X_A = -X_C \quad (2.20)$$

Neste caso, teremos:

$$P_C = \frac{|V_I|^2}{8} \left( \frac{R_C}{(R_r + R_L)^2} \right) = \frac{|V_I|^2}{8R_C} \quad (2.21)$$

$$P_T = \frac{1}{2} V_C I_C^* = \frac{|V_C|^2}{4} \left( \frac{1}{R_r + R_L} \right) = \frac{|V_I|^2}{4R_C} \quad (2.22)$$

Assim como no caso em que a antena opera em modo de transmissão, a máxima potência entregue a carga (linha de transmissão) será metade da potência recebida pela antena [4].

## 2.4. Antenas Filamentares

### 2.4.1. Dipolo Infinitesimal

Para representar uma antena dipolo infinitesimal, pode-se pensar em um condutor reto infinitesimal (ou seja, de dimensões desprezíveis) posicionado simetricamente na origem do sistema de coordenadas, orientado ao longo do eixo  $z$ , com cargas elétricas nas pontas, sendo estas cargas variantes no tempo, de mesmo módulo, mas com sinais opostos. Na prática pode-se considerar um dipolo infinitesimal quando o comprimento  $l$  do fio que liga as cargas é muito menor que o comprimento da onda eletromagnética irradiada [4], também se espera que a largura do fio seja desprezível, isto é, que o comprimento da onda eletromagnética irradiada seja muito maior que o raio do fio. Para este arranjo, se considera também que a corrente que flui através do condutor possui módulo constante.

#### 2.4.1.1. Equações de Campo Eletromagnético

As equações para os campos elétrico e magnético são [4]:

$$E_r = \eta \frac{I_0 l \cos(\theta)}{2\pi r^2} \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \quad (2.23a)$$

$$E_{\theta} = j\eta \frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{(kr)^2}\right) e^{-jkr} \quad (2.23b)$$

$$H_{\phi} = j \frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) e^{-jkr} \quad (2.23c)$$

onde

$\eta$  é a impedância intrínseca do meio, dada pela equação  $\sqrt{\mu/\varepsilon}$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$I_0$  é o valor da corrente elétrica (constante) que flui no fio.

$l$  é o comprimento do dipolo.

$r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  os eixos das coordenadas esféricas.

Como explicado anteriormente, a parcela do campo elétrico de interesse é a que representa os campos distantes, pois na maior parte das aplicações práticas,  $r \gg \lambda$ . Assim, considerando apenas as parcelas de campo distante, ter-se-á os seguintes campos elétrico e magnético irradiados pelo dipolo infinitesimal.

$$E_{\theta} = j\eta \frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (2.24a)$$

$$H_{\phi} = j \frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (2.24b)$$

A Densidade de Potência determinada pelo vetor de Poynting é dada pela seguinte equação:

$$S = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\theta} \times \mathbf{H}_{\phi}^*) \vec{r} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r}\right)^2 \vec{r} = \frac{\eta}{8} \left(\frac{I_0 l}{\lambda}\right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{r} \quad (2.25)$$

Dessa forma a potência irradiada é obtida através da integração de superfície da equação do vetor de Poynting.

$$P = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{I_0 l}{\lambda}\right)^2 \quad (2.26)$$

Com o valor da potência real irradiada calculado, pode-se calcular a resistência de radiação da antena, de forma que:

$$\frac{1}{2}|I_0|^2 R_r = \eta \frac{\pi}{3} \left(\frac{I_0 l}{\lambda}\right)^2 \quad (2.27)$$

Como  $I_0$  é um valor real,  $|I_0|^2 = I_0^2$ , então:

$$R_r = \eta \frac{2\pi}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (2.28)$$

Um dipolo é considerado infinitesimal quando  $l \leq \lambda/50$  [4].

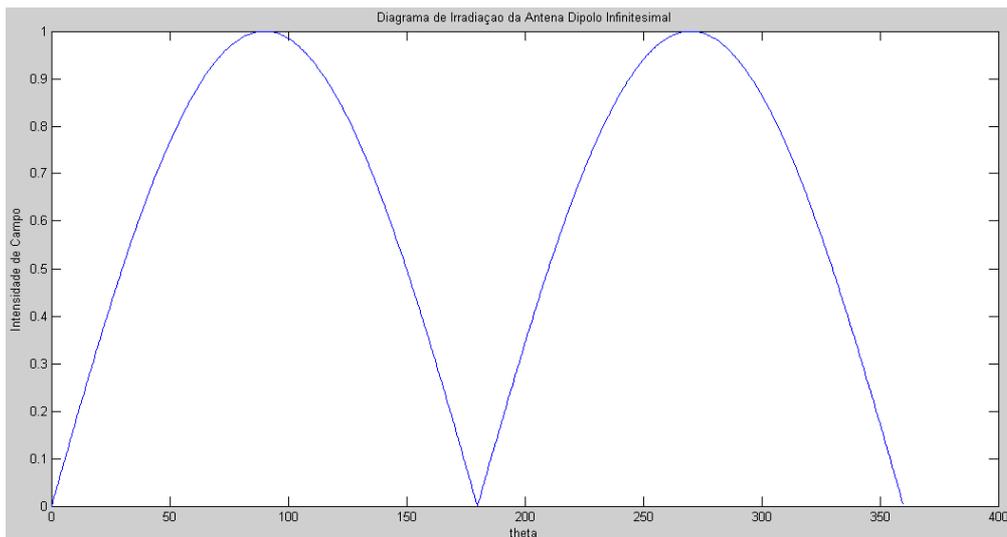
#### 2.4.1.2. Digrama de Irradiação

Com o auxílio do Matlab será apresentado o diagrama de irradiação de uma antena dipolo infinitesimal posicionada ao longo do eixo  $z$ . O diagrama de irradiação em função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , então se deve isolar, de sua equação os termos que dependem de  $\phi$  e  $\theta$ , para que se possam traçar os diagramas de irradiação vertical e horizontal respectivamente.

Da Equação (2.24a), tem-se que:  $E_\theta = j\eta \frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r} e^{-jkr}$ , para se traçar o diagrama de irradiação deve-se separar a equação do campo  $E$  da seguinte forma:

$$E_\theta = E_0 f(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.29)$$

aonde  $f(\theta, \phi)$  é a função que representa o diagrama de irradiação da antena. Para o caso do dipolo infinitesimal  $f(\theta, \phi) = \sin(\theta)$ . A Figura (2.8) mostra o diagrama de irradiação vertical (em função de  $\theta$ ) da antena dipolo infinitesimal.

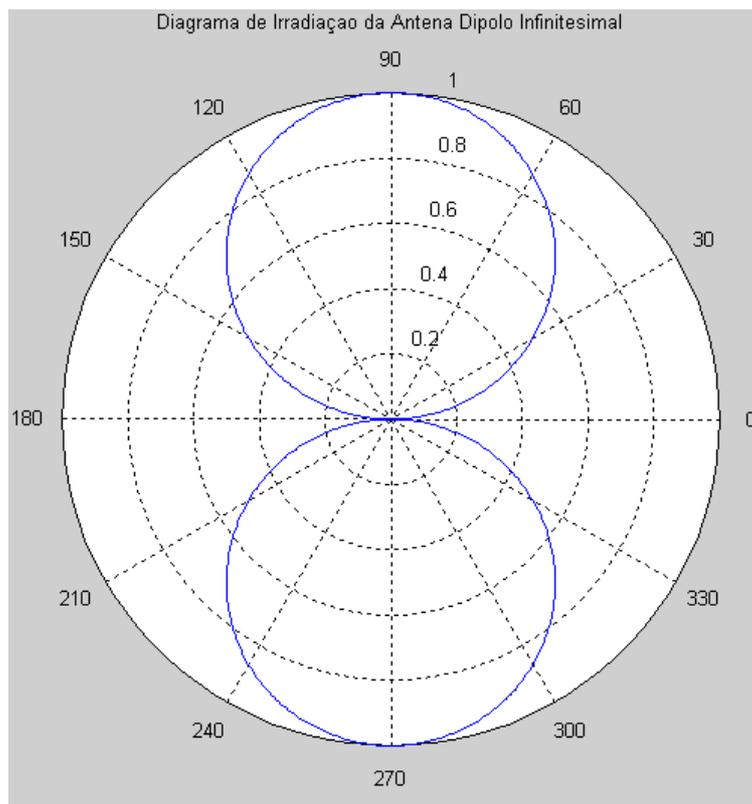


**Figura 2.8 – Diagrama de Irradiação da Antena Dipolo Infinitesimal na forma cartesiana**

Como  $f(\theta, \phi)$  é função apenas de  $\theta$ , o diagrama cartesiano é a representação de  $f \times \theta$ . Com base no gráfico pode-se concluir que a antena

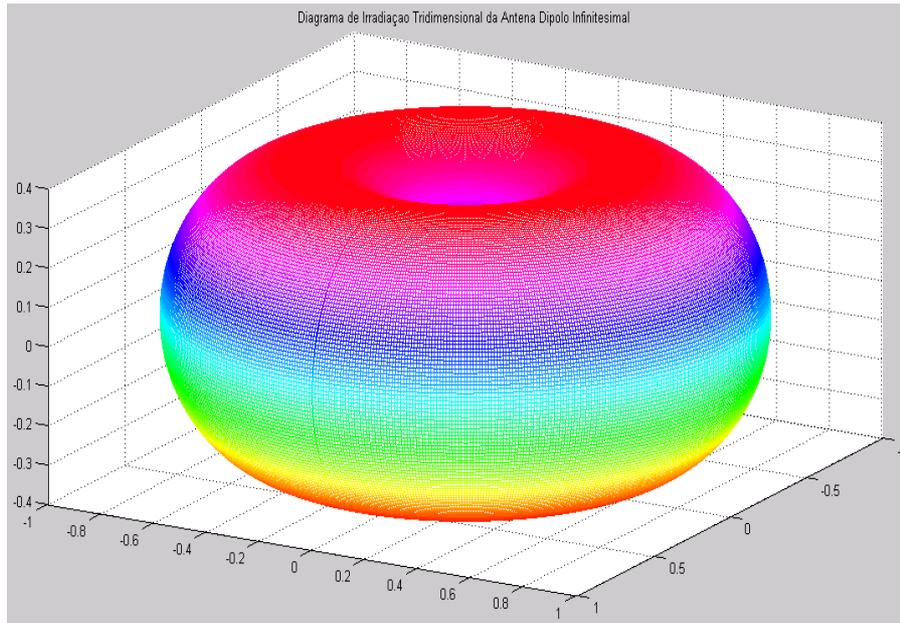
dipolo infinitesimal possui duas direções de máxima irradiação de potência ( $+90^\circ$ ,  $-90^\circ$ ), neste caso, às direções de máximo distam exatamente  $180^\circ$  uma da outra.

Um parâmetro importante da antena é a razão frente-costas [8], que é a relação entre a potência transmitida na direção principal de irradiação e a potência transmitida a  $180^\circ$  desta direção. Para algumas aplicações é necessário que esta relação seja praticamente 0, ou seja, que a potência transmitida para as “costas” seja muito menor que a potência transmitida na direção principal. Uma antena dipolo tem como característica ter uma alta relação frente-costas, para que este tipo de antena possa ser utilizado em aplicações que precisem de antenas com baixa relação frente-costas utiliza-se um material condutor plano atrás da antena, este condutor irá refletir a potência de forma que só haja irradiação para “frente” [4]. A Figura (2.9) mostra o gráfico de  $f(\theta, \phi)$  na forma polar.



**Figura 2.9 – Diagrama de Irradiação da Antena Dipolo Infinitesimal na forma polar**

Por fim, o diagrama de irradiação na forma tridimensional de  $f(\theta, \phi)$  é mostrado na Figura (2.10).



**Figura 2.10 – Diagrama de Irradiação da Antena Dipolo Infinitesimal na forma 3D**

Analisando o diagrama de irradiação tridimensional é possível confirmar que o campo elétrico irradiado pela antena varia apenas com  $\theta$  (plano vertical) e que em  $\varphi$  (plano horizontal) a antena é Omnidirecional e irradia igualmente em todas as direções. Este é, por exemplo, o comportamento esperado para uma antena de transmissão de celular que, teoricamente, necessita varrer todas as direções na horizontal, enquanto na vertical deve irradiar apenas dentro de uma faixa angular específica [15].

#### 2.4.1.3. Diretividade

Aplicando a equação do campo elétrico de uma antena dipolo infinitesimal, definida pela Equação (2.24a), à formula do cálculo da diretividade definida pela Equação (2.7), tem-se:

$$E = j\eta \frac{kI_0 l \sin(\theta)}{4\pi r} e^{-jkr} \therefore |E_{\max}|^2 = \left( \frac{\eta k I_0 l}{4\pi r} \right)^2 \quad (2.30a)$$

Dessa forma,

$$U_{\max} = \frac{r^2}{2\eta} |E_{\max}|^2 = \frac{\eta}{2} \left( \frac{k I_0 l}{4\pi} \right)^2 \quad (2.31b)$$

E por fim, a diretividade  $D$ , é calculada através da equação:

$$D = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{\eta (kI_0l)^2}{8\pi \frac{\pi}{3} \left(\frac{I_0l}{\lambda}\right)^2} = \frac{(kI_0l)^2}{8\pi \frac{\pi}{3} \left(\frac{kI_0l}{2\pi}\right)^2} = \frac{(kI_0l)^2}{\frac{8\pi}{12\pi}} = \frac{3}{2} \quad (2.32)$$

Uma forma de interpretar este resultado é que a antena dipolo infinitesimal, consegue irradiar, em sua direção de máximo 1,5x a potência que a antena Omnidirecional irradiaria, na mesma direção [4].

#### 2.4.1.4. Largura de Banda

Para calcular a largura de banda desta antena, é necessário calcular os dois pontos mais próximos da direção de máxima irradiação, um à esquerda e outro à direita, onde a potência irradiada é metade da potência irradiada da direção de máximo, para um mesmo valor de  $r$ . Para o dipolo infinitesimal basta calcular os pontos onde  $\text{sen}^2(\theta) = 0,5$ , já que todas as outras componentes da equação são constantes, dessa forma:

$$\theta_1 = 45^\circ \text{ e } \theta_2 = 135^\circ$$

Então a largura de banda desta antena é  $90^\circ$ .

#### 2.4.2. Dipolos de Comprimento Finito

É considerada antena filamentar aquela cujo comprimento é finito, porém seu diâmetro ainda será considerado desprezível.

Diferentemente do caso do dipolo infinitesimal, em que se considerou que a corrente elétrica que fluía pelo filamento de antena era constante, para um dipolo de comprimento finito isso não pode ser considerado. Para este tipo de dipolo, considera-se, com boa aproximação, que:

$$\vec{I}(z) = I_0 \text{sen} \left[ k \left( \frac{l}{2} - z \right) \right] \vec{z}, \text{ para } 0 \leq z \leq l/2 \quad (2.33)$$

$$\vec{I}(z) = I_0 \text{sen} \left[ k \left( \frac{l}{2} + z \right) \right] \vec{z}, \text{ para } -l/2 \leq z \leq 0$$

Esta distribuição de corrente pressupõe que a corrente é alimentada pelo centro e que a corrente se anula nas pontas, pois  $I(z) = 0$ , com  $z = \pm l/2$  [4].

### 2.4.2.1. Equações de Campo Eletromagnético

O campo elétrico para o dipolo de comprimento finito é dado pelas equações abaixo [4]:

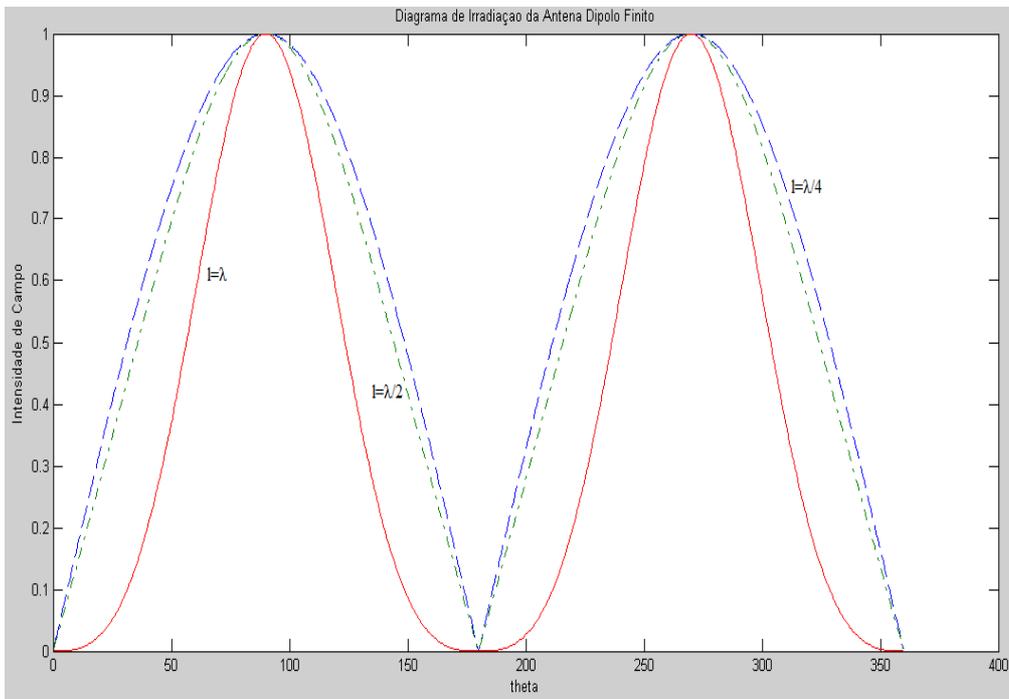
$$E_{\theta} \cong j\eta \frac{I_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta} \right] \quad (2.34a)$$

$$H_{\phi} \cong j \frac{I_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left[ \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin\theta} \right] \quad (2.34b)$$

### 2.4.2.2. Diagramas de Irradiação

Nesta seção serão apresentados os diagramas de irradiação para o dipolo de comprimento finito em suas formas cartesiana e polar.

O diagrama cartesiano para os dipolos cujo tamanho são  $\lambda/4$ ,  $\lambda/2$  e  $\lambda$  foi obtido substituindo o valor do comprimento  $l$  por  $\lambda/4$ ,  $\lambda/2$  e  $\lambda$  na Equação (2.34a) e é apresentado na Figura (2.11).



**Figura 2.11 – Diagrama de Irradiação Cartesiano da Antena dipolo para  $l=[\lambda/4, \lambda/2$  e  $\lambda$ ]**

A Figura (2.12) que apresenta o diagrama de irradiação na forma polar, a curva em vermelho representa o dipolo de um quarto de onda, a curva em azul representa o dipolo de meia onda e a curva em preto o dipolo de onda inteira.

Pelos diagramas de irradiação apresentados, é possível concluir que o dipolo de onda inteira possui uma abertura de feixe menor que os outros dois dipolos, sendo uma antena mais diretiva.

Apesar disso o dipolo de meia onda é muito utilizado, pois a sua resistência de irradiação é de aproximadamente 73 ohms, um valor muito próximo a impedâncias típicas de linhas de transmissão, o que facilita seu casamento a linhas de transmissão.

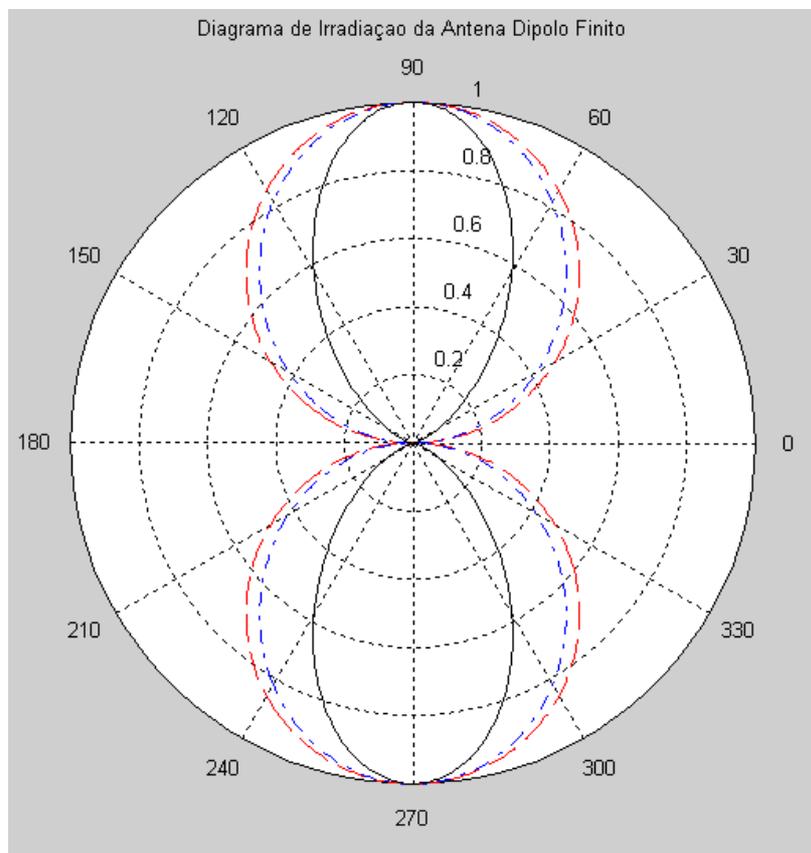


Figura 2.12 – Diagrama de Irradiação Polar da Antena dipolo para  $l=[\lambda/4, \lambda/2 \text{ e } \lambda]$

## 2.5. Conjuntos de Antenas

Um conjunto linear é um grupo de elementos (antenas) com características próprias e alinhadas em determinada direção [4]. As características individuais de cada um desses componentes, quando agrupadas acabam por formar padrões diferentes daqueles que formariam individualmente. A Figura (2.13) mostra a

geometria de campo distante de um conjunto de  $N$  elementos isotrópicos posicionados ao longo do eixo  $z$  e separados de uma distância  $d$ .

O campo elétrico distante irradiado por conjunto de antenas pode ser escrito como o produto entre o campo elétrico irradiado por um único elemento (chamado Fator de Elemento) e um multiplicador chamado de Fator de Conjunto (*Array Factor*) [4]. O fator de elemento, representa a parcela do campo elétrico devido ao tipo de elemento escolhido para formar o conjunto, já o fator de conjunto é função da geometria com que estes elementos estão agrupados, ou seja, o número de elementos, a distância entre os elementos adjacentes, suas magnitudes e fases relativas [4].

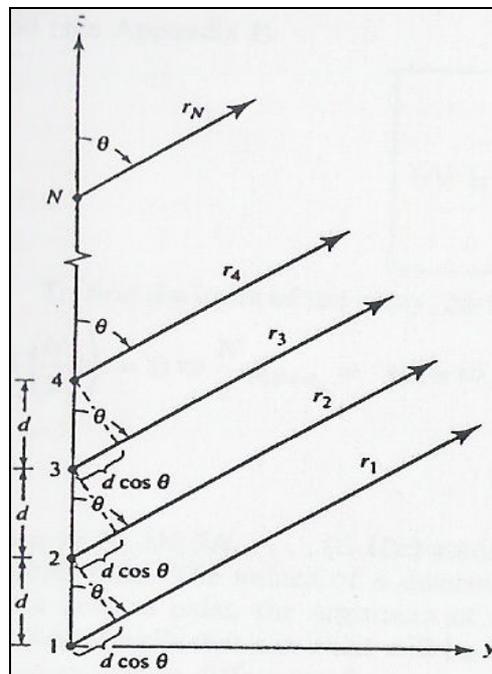


Figura 2.13 - Geometria de campo distante de um conjunto linear de  $N$  elementos [4]

Um conjunto de elementos idênticos, todos com mesma amplitude de corrente de entrada, e com certa defasagem progressiva é chamado de conjunto uniforme [4]. O fator de conjunto normalizado,  $AF$  – *Array Factor*, deste tipo de conjunto é dado pela Equação (2.35).

$$AF = \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{N}{2}\Psi\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\Psi\right)} \right] \quad (2.35)$$

$$\Psi = kd \cos \theta + \beta$$

Onde  $N$  é o número de elementos do conjunto,  $\beta$  é a diferença de fase de corrente de alimentação (já que os módulos são iguais) entre elementos adjacentes,  $k=2\pi/\lambda$  e  $d$  é a distância entre elementos consecutivos.

O fator de conjunto de um arranjo de antenas pode ser alterado variando um ou mais dos seguintes parâmetros:

- A defasagem progressiva de corrente,  $\beta$ .
- A distância entre os elementos consecutivos,  $d$ .
- O número de elementos usado,  $N$ .

Na próxima seção será estudado o efeito gerado no campo elétrico devido ao fator de conjunto quando se variam esses parâmetros.

### 2.5.1. Efeito Causado pela variação da defasagem progressiva de corrente.

Serão simulados, com o auxílio do Matlab, os gráficos, em suas formas cartesiana e polar, de fator de conjunto, dado pela Equação (2.35), para 3 conjuntos de antenas uniforme com  $d=\lambda/2$  e  $N=5$ , mas com a defasagem entre a corrente de alimentação dos elementos dada, respectivamente, por:  $\beta=0^\circ$ ,  $\beta=45^\circ$  e  $\beta=-45^\circ$ .

As Figuras (2.14) e (2.15) mostram os gráficos em suas formas cartesiana e polar, respectivamente.

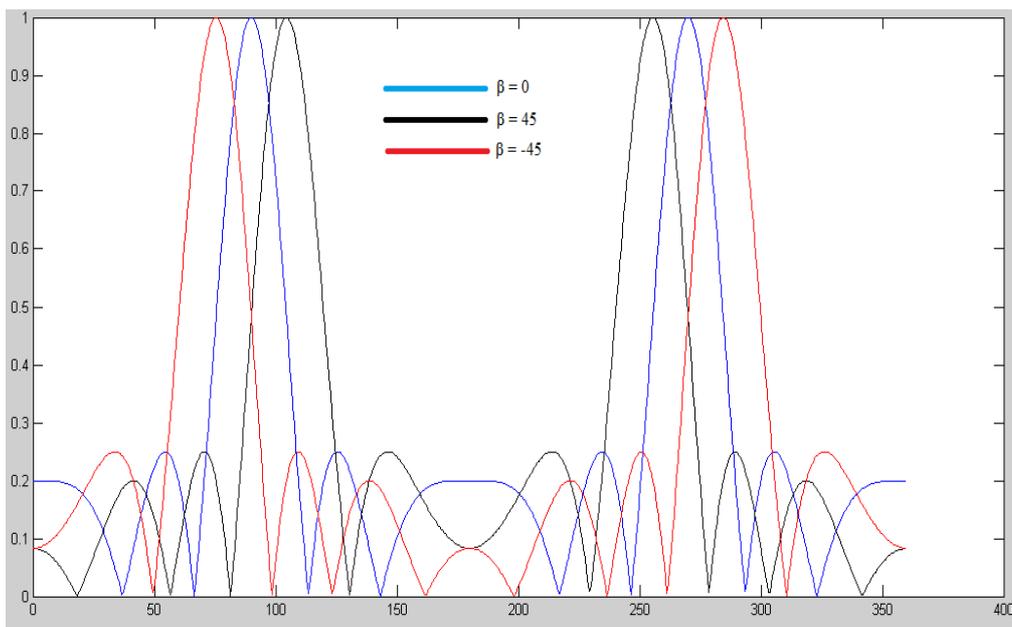


Figura 2.14 – Diagrama cartesiano de campo para o fator de conjunto ( $AF \times \theta$ )

A partir da análise dos gráficos apresentados nas Figuras (2.14) e (2.15), pode-se concluir que a principal (e relevante) alteração causada pela variação do valor de  $\beta$ , é a alteração da direção de máxima irradiação do campo elétrico, ou seja, a curva se mantém idêntica apenas sendo deslocado ao longo do eixo  $\theta$ .

Para  $\beta = 0^\circ$ , a direção de máxima irradiação é onde  $\theta = 90^\circ$ , quando  $\beta = 45^\circ$  a direção de máxima irradiação é adiantada em aproximadamente  $14^\circ$ , sendo em  $\theta = 104^\circ$ , analogamente quando  $\beta = -45^\circ$ ,  $\theta = 76^\circ$ .

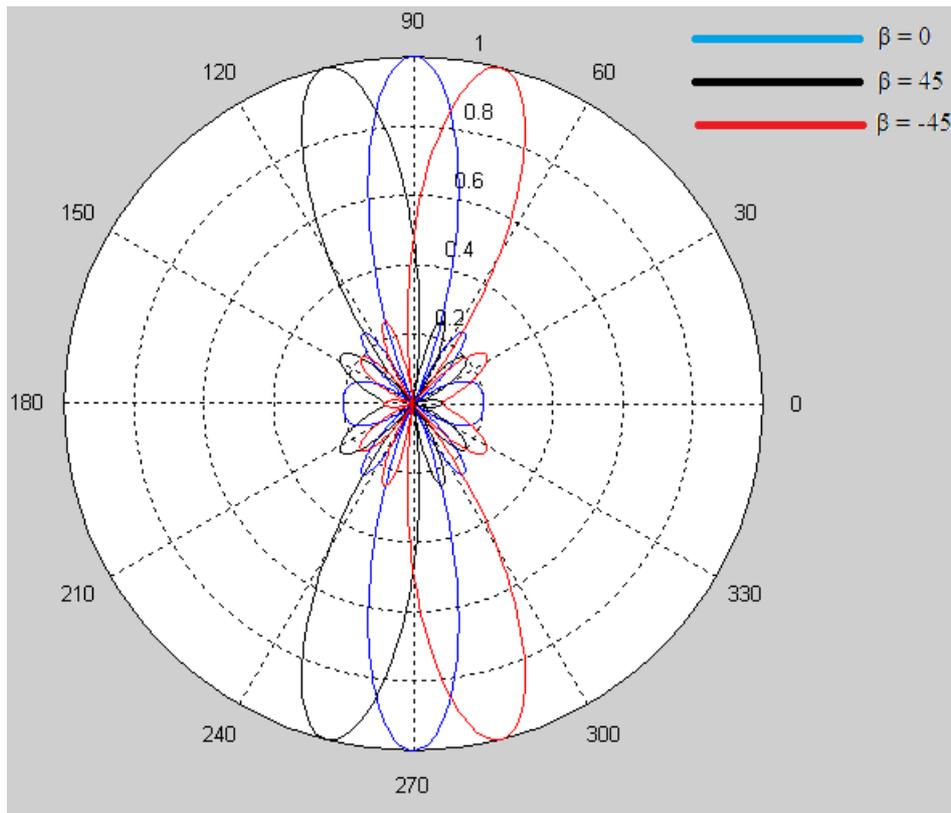
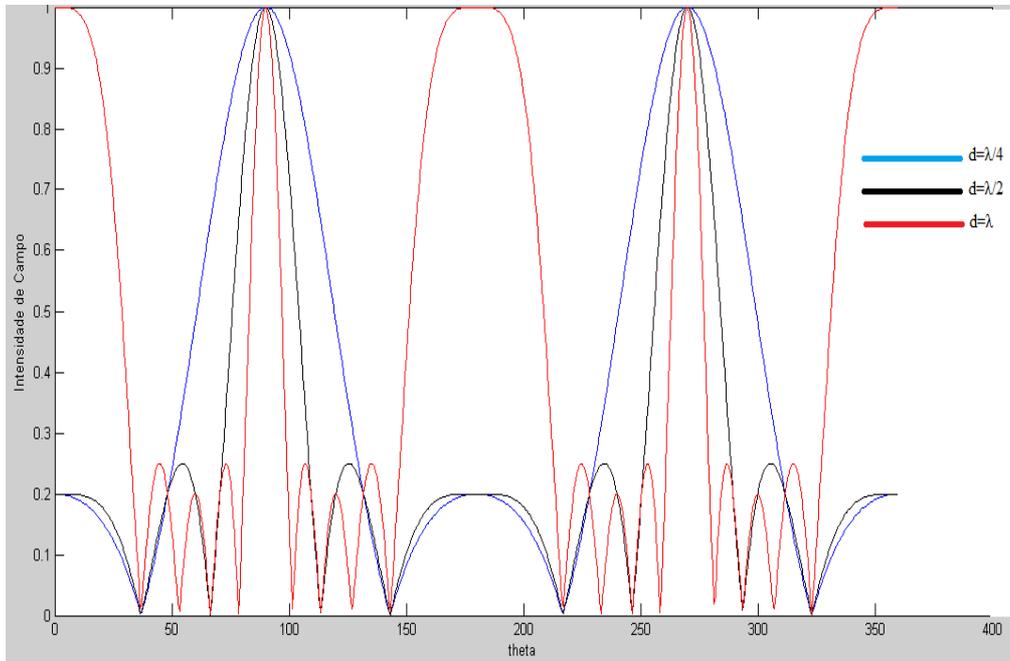


Figura 2.15 – Diagrama polar de campo para o fator de conjunto ( $AF \times \theta$ )

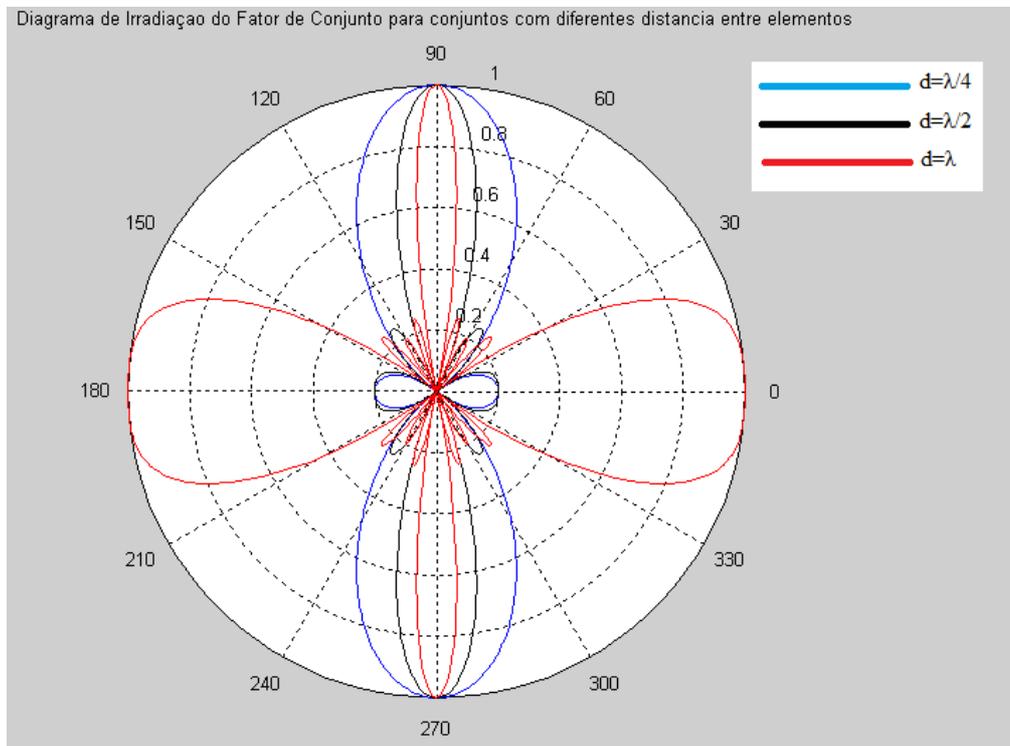
### 2.5.2. Efeito Causado pela variação da distância entre os elementos.

Analogamente ao feito na seção anterior, serão analisados os efeitos da variação da distância entre os elementos consecutivos no diagrama de campo do fator de conjunto resultante. A simulação será feita para três conjuntos de antenas uniformes com  $\beta = 0^\circ$  e  $N = 5$ , e para os seguintes valores de  $d$ :  $\lambda/4$ ,  $\lambda/2$ ,  $\lambda$ .

A partir dos gráficos apresentados nas Figuras (2.16) e (2.17), percebe-se que o aumento de  $d$ , provoca uma redução da largura de banda e o aumento do número de lobos secundários. Outro detalhe é que quando  $d = \lambda$ , o campo elétrico possui uma segunda direção de máxima irradiação com amplitude igual à amplitude do lobo principal. O valor mais comum de  $d$  é  $\lambda/2$  [4].



**Figura 2.16 – Diagrama cartesiano de campo para o fator de conjunto ( $AF \times \theta$ )**



**Figura 2.17 – Diagrama polar de campo para o fator de conjunto ( $AF \times \theta$ )**

### 2.5.3. Efeito Causado pela variação no número de elementos.

Nesta seção, será simulado no MATLAB o diagrama de irradiação do fator de conjunto de três conjuntos de antenas uniformes com  $d = \lambda/2$ ,  $\beta = 0$  e com 5, 10 e 15 elementos. Os resultados serão apresentados em gráficos nas formas Cartesianas e Polar.

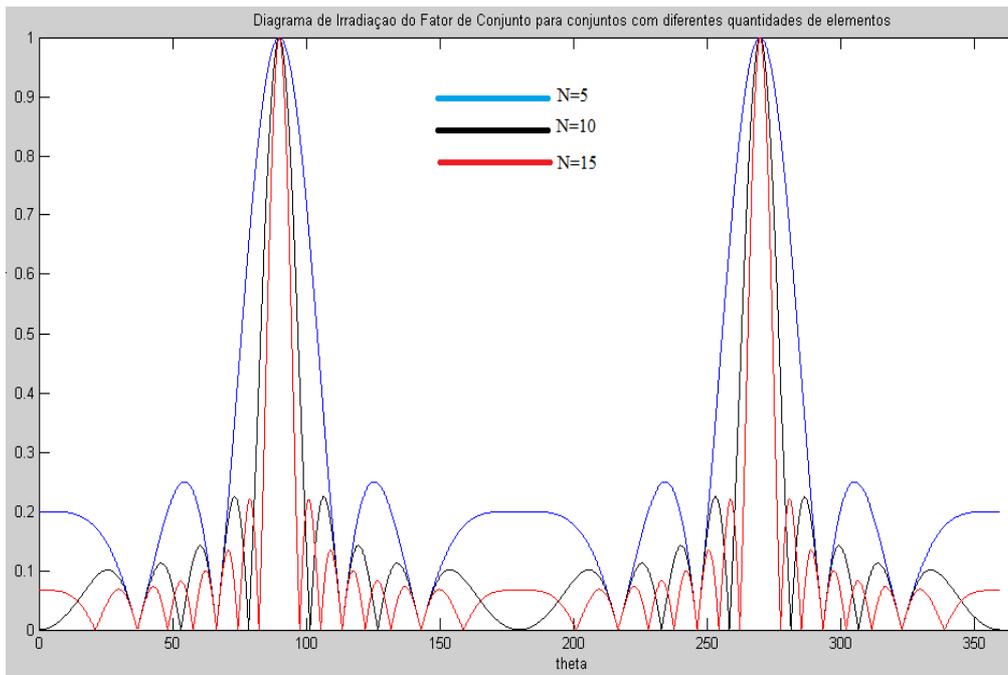


Figura 2.18 – Diagrama cartesiano de campo para o fator de conjunto ( $AF \times \theta$ )

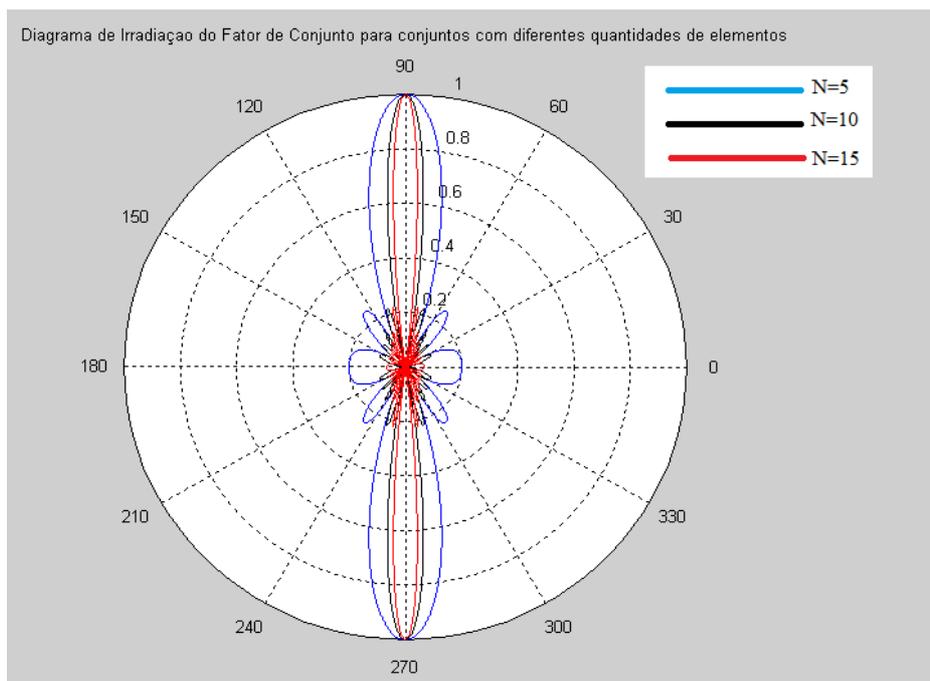


Figura 2.19 – Diagrama polar de campo para o fator de conjunto

Analisando as Figuras (2.18) e (2.19), pode-se perceber que o aumento do número de elementos, implica em redução da largura de feixe e aumento da diretividade. É possível perceber, também, que a energia se concentra mais no lobo principal e que o número de lobos secundários aumenta com o aumento de  $N$ .

Como foi visto, é possível controlar as características da onda irradiada mudando a forma como o arranjo está configurado. No Capítulo 4 será visto que os métodos desenvolvidos consistem em determinar o número e o arranjo dos elementos que gerem um diagrama de irradiação de acordo com as especificações dadas.

### 3. Teoria de Processamento de Sinais

#### 3.1. Teoria de Sinais Discretos

Os sinais presentes na natureza são analógicos. Pode-se definir um sinal analógico como um sinal que existe em qualquer instante dentro do seu período de duração e pode assumir em certo instante um entre infinitos estados (amplitudes).

Um sinal discreto, por sua vez, é um sinal que existe apenas em instantes específicos e possui estados finitos. O fato de possuir estados finitos e amostras torna o sinal digital mais fácil de ser processado, tratado e recuperado [5].

Nos últimos anos técnicas de processamento digital de sinais têm evoluído e vêm sendo adotadas em larga escala para tratar sinais que outrora eram tratados analogicamente. Mas, para que se possa tratar digitalmente um sinal de natureza analógica, é preciso amostrá-lo de forma a criar um sinal digital que será tratado e processado digitalmente e, a partir deste, se necessário, reconstruir o sinal analógico correspondente.

A grande vantagem do tratamento digital do sinal é que, como foi dito, o sinal digital é um sinal que possui finitos estados, tal característica facilita a remoção de ruídos, compressão, dentre outros [5].

##### 3.1.1. Teorema de Nyquist [5]

Um importante passo para a transformação de um sinal analógico em sinal digital é a amostragem. Define-se  $f_0$ , como sendo a frequência de amostragem. O teorema de Nyquist diz que um sinal precisa ser amostrado a uma frequência igual ou superior ao dobro de sua frequência máxima, para que possa ser totalmente regenerado, ou seja,  $f_0 > 2f_{\max}$  [5].

Se um sinal analógico, contínuo no tempo representado por  $g(t)$  é amostrado a uma frequência  $f$ , de forma que o período de amostragem seja  $T=1/f$ , a equação que define o sinal amostrado pode ser escrita como:

$$x[n] = g(nT) \quad (3.1)$$

Quando se utiliza uma frequência de amostragem inferior à frequência de Nyquist, a amostragem não se torna unívoca, ou seja, ao se tentar recuperar  $\mathbf{g}(t)$  a partir de  $\mathbf{x}[n]$ , obter-se-ia não uma, mas um conjunto de funções  $\mathbf{g}(t)$  cujos pontos coincidiriam com as amostras  $\mathbf{x}[n]$ . Este efeito é denominado *aliasing*.

Na prática, as frequências de amostragem devem ser superiores a frequência de Nyquist, para entender melhor este processo, seja um sinal analógico  $\mathbf{g}(t)$  cuja função no domínio da frequência é representada pela função  $G(\omega)$  da Figura (3.1).

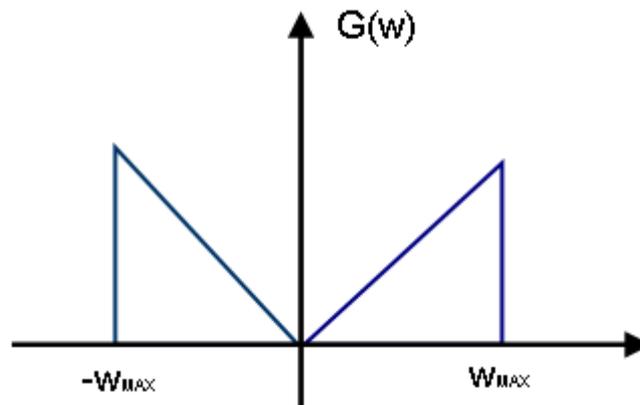


Figura 3.1 – Representação gráfica de  $\mathbf{g}(t)$  no domínio da frequência.

Pode-se notar que o espectro de  $\mathbf{g}(t)$  é limitado em frequência, onde sua frequência máxima  $f_{\max} = \frac{W_{\max}}{2\pi}$ . Pode-se demonstrar que ao se amostrar  $\mathbf{g}(t)$  a uma frequência  $f_0$ , onde  $f_0 = \frac{W_0}{2\pi}$ , é obtido  $\mathbf{x}[n]$  que possui representação no domínio da frequência  $\mathbf{X}(\omega)$  como mostrado na Figura (3.2).

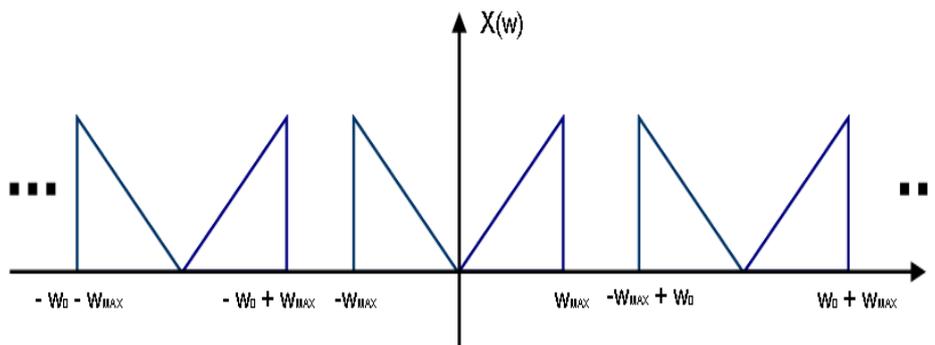


Figura 3.2 – Representação de  $\mathbf{x}[n]$  no domínio da frequência.

Ao se amostrar um sinal, sua componente em frequência se translada ao redor da frequência de amostragem e de todos os seus harmônicos (a demonstração deste efeito está fora do escopo deste trabalho), de forma que

para recuperar o sinal analógico basta filtrar o sinal amostrado em filtro passa-baixas com frequência de corte igual a  $f_{\max}$  [5].

É fácil perceber que o gráfico de  $\mathbf{X}(\omega)$  assume a forma demonstrada na Figura (3.2) só e somente se  $f_0 > 2f_{\max}$ , caso contrário  $f_0 - f_{\max} < f_{\max}$ , ou seja, o espectro de uma frequência harmônica começaria antes do término do seguinte, causando *aliasing* e impedindo a recuperação correta do sinal analógico pelo processo de filtragem.

Há duas formas de se evitar este efeito. A primeira, e talvez mais óbvia, é sempre escolher uma taxa de amostragem igual ou superior à taxa de Nyquist. Em casos que esta opção não é viável se utilizam filtros anti-*aliasing*. Estes limitam a banda do sinal  $\mathbf{g}(t)$  em a um determinada frequência  $f_c$  (que equivale a frequência de corte do filtro)  $f_c \leq f_0/2$ , ou seja, descartam-se as componentes de frequência mais altas antes da amostragem.

Na prática não basta apenas que  $f_{\max}$  (ou  $f_c$ ) seja igual ao dobro da frequência de amostragem, pois neste caso seria necessário um filtro passa-baixas ideal para recuperar corretamente o sinal analógico, porém tal filtro não é realizável, então sempre será necessário que haja uma banda de guarda entre dois harmônicos consecutivos para que se possa evitar o *aliasing*. A banda de guarda é proporcional a frequência máxima do sinal [5].

### 3.1.2. Quantização

Seja  $\mathbf{g}(t)$ , um sinal analógico a ser amostrado, sendo expresso por  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{sen}(t)$ . Ao tomarmos uma amostra deste sinal em um instante  $t_0$  qualquer, a amplitude desta amostra expressa por  $\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{sen}(t_0)$ , pode assumir qualquer valor real no intervalo  $[-1;1]$ .

A quantização é processo de atribuição de valores discretos para um sinal cuja amplitude varia entre infinitos valores [5].

Na função  $\mathbf{g}(t)$  utilizada como exemplo, são criados quatro níveis de amplitude de forma que:  $m_0 = -1$ ,  $m_1 = -1/3$ ,  $m_2 = 1/3$  e  $m_3 = 1$ . Seja  $\mathbf{g}_q(t)$  a função  $\mathbf{g}(t)$  podendo assumir apenas os valores expressos por  $[m_0, m_1, m_2, m_3]$  como amplitude.

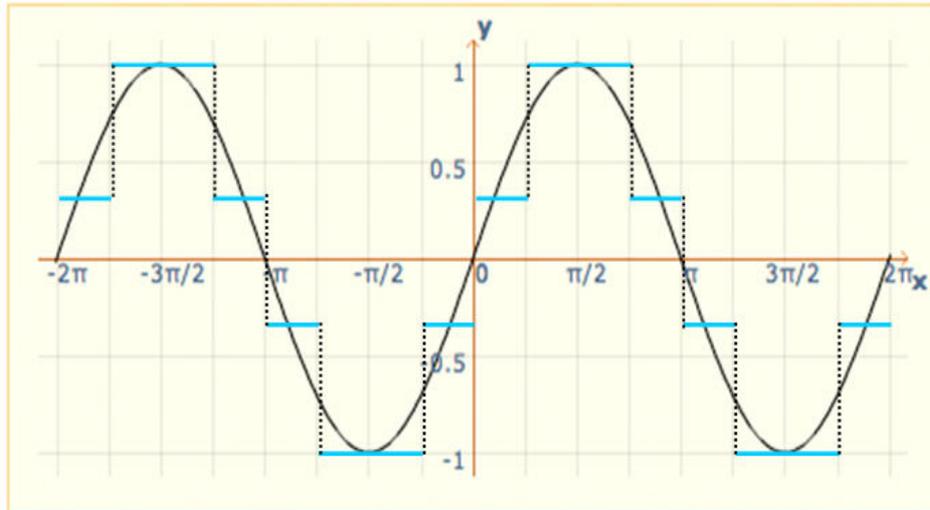


Figura 3.3 – Gráfico de  $g(t)$  e  $g_q(t) \times t$

Na Figura (3.3) pode se observar, em azul, que o gráfico de  $g_q(t)$  tem o aspecto de degraus, onde cada degrau representa os níveis  $m_0$  a  $m_3$ . A diferença entre  $g_q(t)$  e  $g(t)$  no instante da amostra é chamada erro de quantização. Intuitivamente, pode-se perceber que quantos mais níveis forem utilizados, menor será o erro de quantização [9].

Embora a quantização insira erro, ela torna a missão de separar o ruído do sinal após a transmissão mais simples, dado que o sinal só pode assumir níveis conhecidos de amplitude. As escolhas dos níveis de amplitude visam minimizar o erro de quantização.

Na recepção, há diferentes critérios de decisão. Há critérios mais simples que escolhem o nível mais próximo da amplitude do sinal recebido (quantização linear) e há outros mais complexos que utilizam a informação da amostra anterior para tomar a decisão (quantização diferencial) [9].

O exemplo mostrado utilizou o método de quantização linear. Um problema com este tipo de método é que para amostras que possuem amplitudes menores, a amplitude do erro de quantização torna-se muito significativa, pois o erro de quantização é o mesmo independente do valor da amostra, o que implica em distorções maiores do sinal para amplitudes menores. Uma forma de corrigir isso é usando métodos de quantização não-lineares, um deles utiliza espaçamento menor entre níveis adjacentes para baixas amplitudes e espaçamentos maiores em amplitudes mais altas visando manter a relação entre a amplitude do sinal e a amplitude do erro de

quantização aproximadamente constante. Quantizações deste tipo são chamadas quantizações adaptativas [9].

### 3.2. Teoria de Transformadas Discretas

Transformadas discretas são utilizadas para se obter representações no domínio da frequência de sinais discretos no tempo. Dessa forma é possível analisar características como a largura de banda do sinal, além de facilitar a análise de circuitos.

Nas seções seguintes serão analisadas as principais transformadas discretas.

#### 3.2.1. Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

A transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT) de uma seqüência  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  é a representação dela em termos de  $e^{j\omega n}$ , onde  $\omega$  define uma variável de frequência angular.

A expressão que define a DTFT é dada por [5]:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (3.2)$$

A DTFT é uma extensão natural do conceito da transformada de Fourier para sinais discretos, todos os conceitos e propriedades da transformada de Fourier se aplicam a DTFT.

Se um filtro discreto possui resposta ao impulso dada por uma função discreta  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ , a resposta em frequência deste filtro será dada pela DTFT de  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ .

Dessa forma, se um sistema LTI (Linear e Invariante no Tempo) [5] discreto no tempo com resposta ao impulso dada por  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ , como o da Figura (3.4), que possui entrada dada por  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  e saída dada por  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ , então a relação expressa pela Equação (3.3) é válida.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (3.3)$$

Onde  $H(\omega)$ ,  $Y(\omega)$  e  $X(\omega)$  são as DTFTs de  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ ,  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$  e  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  respectivamente [5].

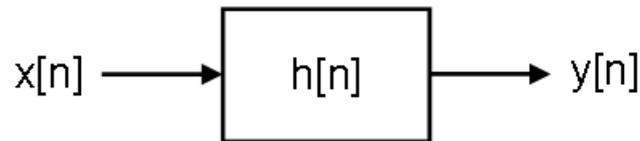


Figura 3.4 – Um Sistema LTI discreto no tempo.

Vale ressaltar que a DTFT de uma seqüência  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  é contínua no domínio da frequência [5].

### 3.2.1.1. Atraso de Grupo

A resposta em frequência de um sistema é função de seu módulo, ou seja, a forma como este sistema modifica a amplitude das amostras da seqüência que estão sendo filtradas em função da frequência desta seqüência e também será função de sua fase, que é a diferença entre as fases do sinal de entrada e do sinal de saída para uma frequência  $\omega_0$ .

O atraso de grupo é a função que descreve o atraso provocado pelo sistema em função da diferença de fase entre o sinal de entrada e o sinal de saída e é dado pela Equação (3.4) [5].

$$\tau_g(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}, \quad (3.4)$$

onde  $\tau_g(\omega)$  representa o atraso de grupo e  $\theta(\omega)$  a fase da resposta em frequência do filtro utilizado no sistema.

Para que não haja distorções causadas por diferenças de atraso entre as componentes de frequência do sinal de saída, o atraso de grupo deve ser aproximadamente constante na região de interesse [5].

### 3.2.2. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Como foi visto, a DTFT é uma função contínua no domínio da frequência. Seja  $\mathbf{X}(\omega)$  a função que representa a DTFT de  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ , seja  $\mathbf{X}(\mathbf{k})$  uma função com  $N$  amostras igualmente espaçadas de  $\mathbf{X}(\omega)$  no intervalo de  $[0;2\pi)$ , de forma que:

$$\omega = 2\pi k / N, \text{ com } 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.2), obtém-se que:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \text{ com } 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.6)$$

A expressão definida por (3.6) é conhecida como a transformada discreta de Fourier (DFT). Uma notação utilizada usualmente é:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (3.7)$$

Aplicando (3.7) em (3.6), a equação é reescrita com a seguinte notação:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \text{ com } 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.8)$$

A transformada discreta inversa de Fourier (IDFT) é dada por:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \text{ com } 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.9)$$

A DFT foi desenvolvida para que se possa trabalhar com sinais discretos também no domínio da frequência. Como dito, sinais discretos são mais simples de serem recuperados (remoção de ruídos mais simples) e há ganho computacional considerável ao se trabalhar com sinais discretos [5].

### 3.2.2.1. Forma Matricial

A equação da DFT pode ser escrita na forma matricial  $\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{X}$  é o vetor composto pelas  $N$  amostras  $\mathbf{X}[\mathbf{k}]$ ,  $\mathbf{x}$  é o vetor composto pelas  $N$  amostras  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  e  $\mathbf{D}_N$  é chamada de matriz DFT, é uma matriz  $N \times N$  dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{D}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Analogamente a IDFT também pode ser escrita em sua forma matricial, sendo  $\mathbf{x} = (\mathbf{D}_N)^{-1} \mathbf{X}$ , onde  $(\mathbf{D}_N)^{-1}$  é uma matriz  $N \times N$  dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{D}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

### 3.2.2.2. Convolução Circular

A convolução circular entre o sinal de entrada e a resposta ao impulso de um filtro discreto define a resposta do filtro ao sinal de entrada aplicado, mas antes de definir a convolução circular é necessário definir uma operação chamada de deslocamento circular.

Se  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  é uma seqüência de tamanho  $N$ , definida no intervalo  $0 \leq n \leq N-1$  e  $n_0$  um número inteiro, a nova seqüência  $\mathbf{x}_1[\mathbf{n}] = \mathbf{x}[\mathbf{n} - \mathbf{n}_0]$  não é mais definida no intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ . Dessa forma, é preciso definir outro tipo de deslocamento que sempre mantenha a seqüência deslocada no *range* de  $0 \leq n \leq N-1$ .

Assim é definido o deslocamento circular denotado por  $x_c = x[\langle n - n_0 \rangle_N]$ , Para  $n_0 > 0$  implica em um deslocamento circular para a esquerda, da mesma forma se  $n_0 < 0$  implica em um deslocamento circular para a direita.

Se  $n_0 > 0$ , a equação que define  $x_c$  é definida por (3.12).

$$x_c = \begin{cases} x[n - n_0], & \text{para } n_0 \leq n \leq N-1 \\ x[N + n - n_0], & \text{para } 0 \leq n < n_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Analogamente, para  $n_0 < 0$ ,  $x_c$  pode ser escrito como na Equação (3.13).

$$x_c = \begin{cases} x[n - (N + n_0)], & \text{para } N + n_0 \leq n \leq N-1 \\ x[n - n_0], & \text{para } 0 \leq n < N + n_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Outra definição importante é a operação de reversão circular.

$$x[\langle -n \rangle_N] = x[\langle N - n \rangle_N] \quad (3.14)$$

$$x[\langle -n \rangle_N] = \begin{cases} x[N - n], & \text{para } 1 \leq n \leq N-1 \\ x[n], & \text{para } n = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

A partir da definição do deslocamento circular podemos definir a convolução circular. Sejam duas seqüências finitas de tamanho  $N$ ,  $\mathbf{g}[\mathbf{n}]$  e  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ , a convolução circular  $\mathbf{y}_C[\mathbf{n}]$  é definida pela Equação (3.16) [5].

$$y_C[n] = \sum_{m=0}^{N-1} g[m] \cdot h[\langle n-m \rangle_N], \text{ com } 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.16)$$

A diferença básica entre as operações de convolução linear e circular é que, enquanto na primeira o tamanho da seqüência  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$  resultado da convolução linear entre  $\mathbf{g}[\mathbf{n}]$  e  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$  não será o mesmo que o das funções  $\mathbf{g}[\mathbf{n}]$  e  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ , será a soma do tamanho de ambas menos 1, na convolução circular  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$  terá o tamanho  $N$ , assim como  $\mathbf{g}[\mathbf{n}]$  e  $\mathbf{h}[\mathbf{n}]$ .

Assim como a convolução linear, a circular é comutativa [5], ou seja:

$$g[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes g[n] \quad (3.17)$$

Uma convolução circular de  $N$  pontos pode ser escrita na forma matricial como na Equação (3.18).

$$\begin{bmatrix} y_C[0] \\ y_C[1] \\ y_C[2] \\ \vdots \\ y_C[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] & \cdots & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & h[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \cdots & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \\ \vdots \\ g[N-1] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.2.2.3. Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

#### Linearidade

Se uma seqüência  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$  pode ser escrita como uma combinação linear de duas seqüências, a DFT de  $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ ,  $\mathbf{X}[\mathbf{k}]$  poderá ser escrita como uma combinação linear das DFTs destas seqüências. Esta propriedade está representada na Equação (3.19).

$$\begin{aligned} x[n] &\xrightarrow{DFT} X[k] \\ \alpha g[n] + \beta h[n] &\xrightarrow{DFT} \alpha G[k] + \beta H[k] \end{aligned} \quad (3.19)$$

#### Deslocamento Circular no Tempo

A DFT de uma seqüência circularmente deslocada no tempo de um inteiro  $n_0$  é dada pelo produto entre  $W_N^{kn_0}$  e a DFT da seqüência original.

$$\begin{aligned}
x[n] &\xleftrightarrow{DFT} X[k] \\
g[\langle n - n_0 \rangle_N] &\xleftrightarrow{DFT} W_N^{kn_0} G[k]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

### Deslocamento Circular na Frequência

A IDFT de uma seqüência circularmente deslocada na frequência de um inteiro  $k_0$  é dada pelo produto entre  $W_N^{-k_0 n}$  e a IDFT da seqüência original.

$$\begin{aligned}
x[n] &\xleftrightarrow{DFT} X[k] \\
W_N^{-k_0 n} g[n] &\xleftrightarrow{DFT} G[\langle k - k_0 \rangle_N]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

### Dualidade

Se a DFT de uma seqüência  $\mathbf{g}[\mathbf{n}]$  é  $\mathbf{G}[\mathbf{k}]$ , então a DFT de  $\mathbf{G}[\mathbf{n}]$  é representada pela Equação (3.22).

$$\begin{aligned}
x[n] &\xleftrightarrow{DFT} X[k] \\
G[n] &\xleftrightarrow{DFT} N \cdot g[\langle -k \rangle_N]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

### Convolução Circular

A DFT de uma seqüência  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ , onde  $y[n] = g[n] \otimes h[n]$  é dada por  $\mathbf{G}[\mathbf{k}]\mathbf{H}[\mathbf{k}]$ .

$$\begin{aligned}
x[n] &\xleftrightarrow{DFT} X[k] \\
g[n] \otimes h[n] &\xleftrightarrow{DFT} G[k]H[k]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

### Modulação

A DFT de uma seqüência  $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ , onde  $y[n] = g[n]h[n]$  é dada pela convolução circular de  $\mathbf{G}[\mathbf{k}]$  e  $\mathbf{H}[\mathbf{k}]$  dividido por  $N$ .

$$\begin{aligned}
x[n] &\xleftrightarrow{DFT} X[k] \\
g[n]h[n] &\xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} G[k] \otimes H[k]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.2.3. Transformada Z

A transformada da Z de uma seqüência  $\mathbf{g}[\mathbf{n}]$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{z})$  é definida como [5] e [8]:

$$Z\{g[n]\} = G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n} \quad (3.25)$$

Aonde  $z$  é uma variável complexa contínua. Como qualquer variável complexa,  $z$  pode ser escrita em sua forma polar,  $z = re^{j\omega}$ . Então a Equação (3.25) pode ser reescrita como a seguir:

$$G(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]r^{-n} e^{-j\omega n} \quad (3.26)$$

Ao se tomar  $r = 1$  na Equação (3.26), ela se iguala a Equação (3.2) que representa a DTFT da seqüência  $g[n]$ , isso quer dizer que na região do plano complexo onde  $|z| = 1$ , a transformada  $Z$  se iguala a DTFT daquela seqüência. Isso significa que se  $|z| = 1$  faz parte da região de convergência da transformada  $Z$ , então a DTFT de uma seqüência pode ser obtida substituindo  $z = e^{j\omega}$  na equação da transformada  $Z$  [5] e [8].

A região de convergência (ROC) de uma transformada  $Z$ , é definida como a região onde a desigualdade expressa pela Equação (3.27) é válida.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]r^{-n}| < \infty, \text{ onde } r = |z| \quad (3.27)$$

A transformada  $Z$  de uma seqüência é definida pela sua expressão em  $Z$  e sua região de convergência.

A transformada inversa de  $Z$  pode ser calculada através de diversos métodos, sendo os principais o Teorema dos Resíduos de Cauchy e a expansão em frações parciais [5].

Pode-se demonstrar que [17]:

$$g[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C G(z)z^{n-1} dz \quad (3.28)$$

De acordo com o Teorema dos resíduos de Cauchy, o valor da expressão definida pela Equação (3.28) é dado pela Equação (3.29).

$$g[n] = \sum [\text{Resíduos de } G(z)z^{n-1} \text{ nos pólos contidos na região } C] \quad (3.29)$$

A expressão que define o resíduo de  $G(z)z^{n-1}$  em um pólo  $z = \lambda_0$  de multiplicidade  $m$  é dada por:

$$\text{Res}[G(z)z^{n-1}]_{z=\lambda_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1} (z - \lambda_0)^m G(z)z^{n-1}}{dz^{m-1}} \right]_{z=\lambda_0} \quad (3.30)$$

Em casos que  $G(z)$  é uma função que pode ser escrita em forma de um polinômio racional é mais conveniente expandir  $G(z)$  em frações parciais e calcular a transformada inversa de Z para cada um dos termos obtidos.

Seja  $G(z)$  expresso da seguinte forma:

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (3.31)$$

Considerando  $N > M$ , e que só há pólos simples,  $G(z)$  expandido em frações parciais é escrito da seguinte forma:

$$G(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{1 - \lambda_i z^{-1}} \quad (3.32)$$

onde  $\lambda_i$  representa os  $N$  pólos de  $G(z)$  e  $\rho_i$  pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\rho_i = (1 - \lambda_i z^{-1}) G(z) \Big|_{z=\lambda_i} \quad (3.33)$$

Cada um destes termos expressos na Equação (3.33) possui ROC dada por  $|z| > |\lambda_i|$  e a transformada inversa  $g[n]$  dada por:

$$g[n] = \sum_{i=1}^N \rho_i \lambda_i^n \mu[n] \quad (3.34)$$

Caso  $N \leq M$ , ou seja, o índice do numerador for maior que o índice do denominador,  $G(z)$  deve ser expandido da seguinte forma:

$$G(z) = \sum_{i=0}^{M-N} \eta_i z^{-i} + \frac{P(z)}{D(z)}, \quad (3.35)$$

onde a função de  $z$  representada por  $P(z)/D(z)$  pode ser expandida em frações parciais como na Equação (3.32).

A Tabela (3.1) traz as principais propriedades da transformada Z.

**Tabela 3.1 – Principais propriedades da transformada Z**

Propriedade	Seqüência	Transformada Z	ROC
	$g[n]$	$G(z)$	$\mathfrak{R}_g$
	$h[n]$	$H(z)$	$\mathfrak{R}_h$
Complexo Conjugado	$g^*[n]$	$G^*(z^*)$	$\mathfrak{R}_g$
Inversão no Tempo	$g[-n]$	$G(1/z)$	$1/\mathfrak{R}_g$

Linearidade	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(z) + \beta H(z)$	Inclui $\mathfrak{R}_g \cap \mathfrak{R}_h$
Deslocamento no Tempo	$g[n - n_0]$	$z^{-n_0} G(z)$	$\mathfrak{R}_g$ , exceto $z = 0$ ou $\infty$
Multiplicação por exponencial	$\alpha^n g[n]$	$G(z/\alpha)$	$ \alpha  \mathfrak{R}_g$
Diferenciação em Z	$ng[n]$	$-z \frac{dG(z)}{dz}$	$\mathfrak{R}_g$ , exceto $z = 0$ ou $\infty$
Convolução	$g[n] * h[n]$	$G(z)H(z)$	Inclui $\mathfrak{R}_g \cap \mathfrak{R}_h$
Modulação	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{j2\pi} \oint_C G(v)H(z/v)v^{-1} dv$	Inclui $\mathfrak{R}_g \mathfrak{R}_h$

### 3.2.4. Função de Transferência

Se um filtro digital, com resposta ao impulso igual a  $\mathbf{h[n]}$ , recebe uma seqüência  $\mathbf{x[n]}$  como entrada, a saída  $\mathbf{y[n]}$  é escrita como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.36)$$

Aplicando a transformada Z a Equação (3.36) obtemos:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.37)$$

$H(z)$  é normalmente chamada de função de transferência.

### 3.3. Teoria de Filtros Discretos

Os dois tipos de filtros digitais lineares e invariantes no tempo (que são o escopo deste capítulo) são os filtros FIR (*finite impulse response* ou resposta finita ao impulso) e IIR (*infinite impulse response* ou resposta infinita ao impulso) [5].

Um filtro FIR de tamanho  $N + 1$  possui apenas  $N + 1$  amostras diferente de 0. Se for considerado  $n_0$  como o primeiro valor de  $n$ , onde  $h[n] \neq 0$ , pode-se escrever que:

$$y[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N} h[k]x[n-k] \quad (3.38)$$

sendo  $\mathbf{y}[n]$  a resposta a entrada  $\mathbf{x}[n]$ . Da mesma forma a função de transferência de um filtro FIR é escrita da seguinte forma [5]:

$$H(z) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N} h[n]z^{-n} \quad (3.39)$$

É importante observar que para um filtro ser realizável, ele precisa ser causal, ou seja,  $\mathbf{h}[n] = 0$  para  $n < n_0$ .

$\mathbf{H}(z)$  de um filtro FIR causal possui todos os seus pólos na origem de forma que a ROC de  $\mathbf{H}(z)$  é  $|z| \neq 0$ .

Para um filtro causal do tipo IIR se pode escrever [5]:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] \quad (3.40)$$

É possível perceber a recursividade intrínseca a este tipo de filtro, as amostras coletadas em um instante  $n$  possuem uma parcela que é função das amostras anteriores. O tipo mais simples de filtro IIR é o modelo chamado de auto-regressivo (AR) que possui relação entre saída e entrada no tempo, dada por:

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^N d_k y[n-k] \quad (3.41)$$

Um modelo mais complexo, e também mais comum, é chamado de ARMA (*Autoregressive Moving Average*, ou filtro de média móvel auto-regressivo), cuja relação entre saída e entrada no tempo é dada por [5]:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M p_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N d_k y[n-k] \quad (3.42)$$

A expressão geral para a função de transferência para um filtro IIR causal é dada por:

$$\sum_{k=0}^N d_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M p_k z^{-k} X(z) \quad (3.43)$$

A ROC de um filtro IIR causal é dada pela região exterior ao círculo cujo raio é o pólo mais distante da origem [5].

### 3.3.1. Filtros de Fase Linear

Como explicado na Seção (3.2.1), que trata sobre a DTFT, é importante que a função de transferência de um filtro possua atraso de fase linear, para evitar

distorções causadas por dar atrasos diferentes as componentes de frequência do sinal.

Um filtro terá resposta linear em fase, se a seguinte equação for obedecida [5]:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(c\omega + \beta)} \check{H}(\omega) \quad (3.44)$$

Onde  $\check{H}(\omega)$  é chamada resposta em fase zero (ou a parte real de  $H(e^{j\omega})$ ), ou seja,  $|H(e^{j\omega})| \cos(\theta(\omega))$ ,  $c$  e  $\beta$  são constantes.

Em outras palavras, o filtro terá fase linear se a equação que a define for uma função linear da frequência  $\omega$ .

Filtros do tipo FIR de tamanho  $N + 1$ , terão atraso de fase linear caso um dos dois conjuntos de condições descritos na Equação (3.45) for obedecido.

Dessa forma, pode-se concluir que há quatro tipos de filtros FIR de fase linear como será descrito a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} \check{H}(\omega) = \check{H}(-\omega) \\ \beta = 0 \text{ ou } \beta = \pi \\ c = -N/2 \\ h[n] = h[N-n] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \check{H}(\omega) = -\check{H}(-\omega) \\ \beta = \pi/2 \text{ ou } \beta = -\pi/2 \\ c = -N/2 \\ h[n] = -h[N-n] \end{array} \right. \quad (3.45)$$

### Função de Transferência FIR do tipo 1

A resposta ao impulso de um filtro FIR tipo 1 possui comprimento ímpar, ou seja,  $N$  é par e satisfaz as condições à esquerda da Equação (3.45). A resposta em fase zero é dada por:

$$\check{H}(\omega) = h\left[\frac{N}{2}\right] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h\left[\frac{N}{2} - n\right] \cos(\omega n) \quad (3.46)$$

Uma propriedade interessante é que se  $\mathbf{H}(z)$  é uma função de transferência de um filtro FIR tipo 1, então outras funções de transferência do mesmo tipo podem ser geradas a partir de  $\mathbf{H}(z)$  como abaixo:

$$\mathbf{E}(z) = z^{-N/2} - \mathbf{H}(z) \quad (3.47a)$$

$$\mathbf{F}(z) = (-1)^{N/2} \mathbf{H}(-z) \quad (3.47b)$$

A transformação aplicada pela Equação (3.47a) inverte as características do filtro  $\mathbf{H}(z)$ , ou seja, se  $\mathbf{H}(z)$  for um filtro passa-baixa,  $\mathbf{E}(z)$  será um passa-altas e

vice-versa. Assim como se  $H(z)$  for um filtro do tipo passa-banda e  $E(z)$  será um filtro rejeita banda.

Já a transformação aplicada pela Equação (3.47b) mantém o tipo de filtro de  $H(z)$ , mudando apenas a largura da banda de passagem [5].

### Função de Transferência FIR do tipo 2

A resposta ao impulso de um filtro FIR tipo 2 possui comprimento par, ou seja,  $N$  é ímpar e satisfaz as condições a esquerda da Equação (3.45). A resposta em fase zero é dada por:

$$\tilde{H}(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h \left[ \frac{N+1}{2} - n \right] \cos(\omega(n - 1/2)) \quad (3.48)$$

### Função de Transferência FIR do tipo 3

A resposta ao impulso de um filtro FIR tipo 3 possui comprimento ímpar, ou seja,  $N$  é par e satisfaz as condições a direita da Equação (3.45). A resposta em fase zero é dada por:

$$\tilde{H}(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h \left[ \frac{N}{2} - n \right] \text{sen}(\omega n) \quad (3.49)$$

### Função de Transferência FIR do tipo 4

A resposta ao impulso de um filtro FIR tipo 4 possui comprimento par, ou seja,  $N$  é ímpar e satisfaz as condições a direita da Equação (3.45). A resposta em fase zero é dada por:

$$\tilde{H}(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h \left[ \frac{N+1}{2} - n \right] \text{sen}(\omega(n - 1/2)) \quad (3.50)$$

### 3.3.2. Filtros Digitais Simples

O mais simples filtro FIR passa-baixa é o *moving-average* que possui resposta ao impulso dada por [5]:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n \leq M-1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad (3.51)$$

e a seguinte função de transferência:

$$H(z) = \frac{z+1}{2z} \quad (3.52)$$

A função de transferência da Equação (3.52) possui um pólo em  $z = 0$  e zero em  $z = -1$ . Como todo filtro FIR a ROC é  $|z| > 0$ , dessa forma  $|z| = 1$  faz parte da ROC, então se pode afirmar que:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2) \quad (3.53)$$

É possível perceber que a magnitude de  $H(e^{j\omega})$  cai monotonicamente de 1 a 0, no intervalo  $[0;\pi]$ . O valor de  $\omega$  onde a potência é metade da potência inicial é chamada de frequência de corte ou frequência de 3 dB, para o exemplo em questão isso ocorre quando  $\omega = \pi/2$ . A banda de passagem do filtro é o intervalo entre  $[0;\omega_{3dB}]$ .

A partir dessa função de transferência pode-se construir um filtro FIR passa-alta, substituindo  $z$  por  $-z$  na Equação (3.52).

Para se conseguir atenuações mais altas e transições da banda de passagem para a banda de rejeição mais abruptas é comum utilizar filtros FIR em cascata [5].

Filtros passa-baixa IIR possuem função de transferência do seguinte tipo [5]:

$$H(z) = K \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \quad (3.54)$$

Não é difícil perceber que à medida que  $z$  cresce a magnitude a função de transferência decresce. Neste caso tem-se:

$$|H(e^{j0})| = \frac{2K}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad |H(e^{j\pi})| = 0$$

Tomar-se-á  $K = (1 - \alpha)/2$  para que o ganho em  $\omega = 0$  seja igual a 1, e para que o sistema seja estável  $0 < |\alpha| < 1$ , pode-se demonstrar [5] que a frequência de corte de 3dB é dada por:

$$\cos \omega_c = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \quad (3.55)$$

O valor de  $\alpha$  que torna a função de transferência estável [18] é dado por [5]:

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen} \omega_c}{\text{cos} \omega_c} \quad (3.56)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para um filtro IIR passa-altas.

Um exemplo de função de transferência que representa um filtro passa-banda IIR é como o a seguir [5]:

$$H(z) = \frac{K(1 - z^{-2})}{1 - \beta(1 + \alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}} \quad (3.57)$$

A função de transferência da Equação (3.57) possui um par de pólos complexos conjugados em  $z = re^{\pm j\phi}$ , onde:

$$r = \sqrt{\alpha} \quad (3.58a)$$

$$\phi = \arccos\left(\beta \frac{1 + \alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right) \quad (3.58b)$$

Para que este sistema seja estável  $|\alpha| < 1$  e  $|\beta| < 1$ . O valor de  $\omega$  onde a função de transferência assume o maior módulo é chamado frequência central, dado pela Equação (3.59) [5].

$$\omega_0 = \arccos(\beta) \quad (3.59)$$

A banda de passagem é definida como a diferença entre os dois valores de  $\omega$  em que a potência da função de transferência cai à metade da máxima potência. Este parâmetro é obtido através da seguinte equação [5]:

$$B_w = \arccos\left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}\right) \quad (3.60)$$

### 3.4. Construção de Filtros Digitais

#### 3.4.1. Especificação de um Filtro Digital

Um filtro é construído a partir de um conjunto de especificações, por exemplo, para um filtro do tipo passa-baixas ideal se teria como especificação apenas a frequência de corte  $\omega_c$ , ou seja, a máxima frequência que não deve ser rejeitada.  $H(e^{j\omega})$  seria como o da equação abaixo.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{para } \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{para } \omega > \omega_c \end{cases} \quad (3.61)$$

A curva característica de um filtro passa-baixas ideal é como a Figura (3.5).

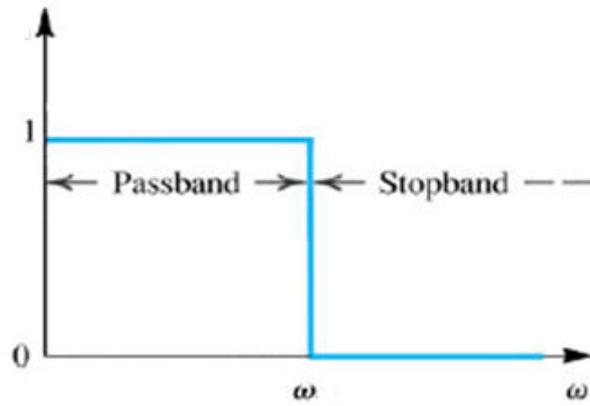


Figura 3.5 – Curva típica de um filtro passa-baixas ideal [5]

É sabido que o filtro passa-baixas ideal não é realizável, pois não possui resposta ao impulso causal, de forma que um conjunto de especificações precisa ser definido para a construção do filtro, como segue:

- A frequência de borda da banda de passagem,  $\omega_p$ .
- A frequência de borda da banda de rejeição,  $\omega_s$ .
- O máximo erro de magnitude (*ripple*) na banda de passagem,  $\delta_p$ .
- O máximo erro de magnitude (*ripple*) na banda de rejeição,  $\delta_s$ .

Para um filtro passa-baixa com tais especificações a banda passante é definida no intervalo  $[0; \omega_p]$  e neste intervalo se tem:  $1 - \delta_p \leq |G(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p$

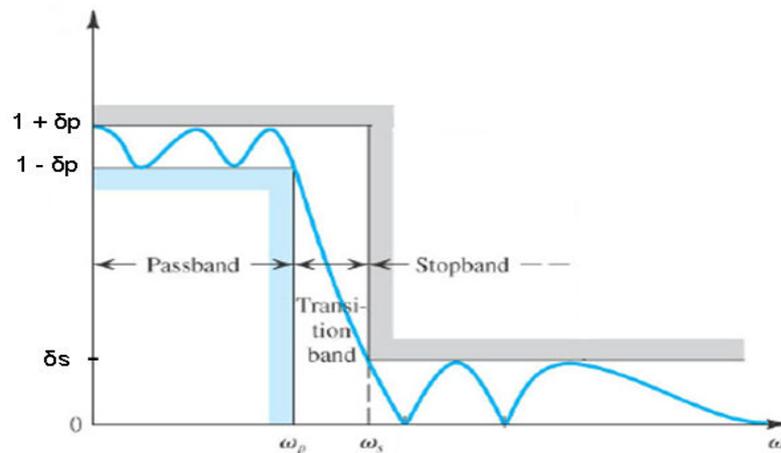


Figura 3.6 – Curva típica de especificação de filtros passa-baixa [5].

A banda de rejeição é definida no intervalo  $[\omega_s; \pi[$  e nessa região tem-se:

$$|G(e^{j\omega})| \leq \delta_s$$

Por fim a banda de transição é definida no intervalo  $]\omega_p; \omega_s[$ .

A resposta em frequência  $G(e^{j\omega})$  de um filtro digital é uma função periódica de  $\omega$  [5] e através das equações de transformadas estudadas pôde-se concluir que para que a resposta ao impulso deste filtro tenha apenas coeficientes reais,  $G(e^{j\omega})$  deve ser uma função par de  $\omega$  e por isso as especificações se dão apenas no intervalo  $[0;\pi]$  [5].

Muitas vezes as frequências de borda de passagem e rejeição são especificadas em Hertz, dessa forma  $\omega_p$  e  $\omega_s$  precisam ser calculados em função de  $F_p$ ,  $F_s$  e  $F_T$ , que simbolizam a frequência de borda de passagem, de rejeição e a frequência de amostragem. As equações utilizadas para este cálculo são:

$$\omega_p = \frac{2\pi F_p}{F_T} \quad (3.62)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi F_s}{F_T} \quad (3.63)$$

### 3.4.2. Construção de um Filtro FIR

A construção de um filtro FIR não possui qualquer ligação com a construção de filtros analógicos.

Para que o filtro FIR seja de fase linear a condição  $h[n] = \pm h[N - n]$  deve ser obedecida.

Há três importantes fórmulas para se estimar a ordem de um filtro FIR [5] baseados nos parâmetros especificados de projeto: a frequência de borda da banda passante  $\omega_p$ , a frequência de borda da banda de rejeição  $\omega_s$ , o máximo erro aceitável na magnitude da função de transferência na região de banda passante  $\delta_p$  e a magnitude máxima que o sinal pode ter na banda de rejeição  $\delta_s$ .

A primeira delas é a fórmula de Kaiser dada pela seguinte equação [5]:

$$N \cong \frac{-20 \log_{10} (\sqrt{\delta_p \delta_s}) - 13}{14,6(\omega_s - \omega_p)/2\pi} \quad (3.64)$$

Outra fórmula simples para estimar a ordem do filtro FIR é a fórmula de Bellanger dada por:

$$N \cong -\frac{2 \log_{10} (10 \delta_p \delta_s)}{3(\omega_s - \omega_p)/2\pi} - 1 \quad (3.65)$$

Uma fórmula mais precisa para este cálculo é a fórmula de Hermann que é dada por:

$$N \cong \frac{D_{\infty}(\delta_p, \delta_s) - F(\delta_p, \delta_s) [(\omega_s - \omega_p)/2\pi]^2}{(\omega_s - \omega_p)/2\pi} \quad (3.66a)$$

onde,

$$D_{\infty}(\delta_p, \delta_s) = [a_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_2 (\log_{10} \delta_p) + a_3] \log_{10} \delta_s - [a_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_5 (\log_{10} \delta_p) + a_6] \quad (3.66b)$$

e

$$F(\delta_p, \delta_s) = b_1 + b_2 [\log_{10} \delta_p - \log_{10} \delta_s] \quad (3.66c)$$

com

$$a_1 = 0,005309 \quad a_2 = 0,07114 \quad a_3 = -0,47610 \quad a_4 = 0,00266$$

$$a_5 = 0,594100 \quad a_6 = 0,42780 \quad b_1 = 11,01217 \quad b_2 = 0,51244$$

As três fórmulas acima produzem resultados com bons graus de aproximação, se  $\delta_p$  e  $\delta_s$  forem pequenos. Para valores mais altos destas variáveis a fórmula de Hermann é a que apresenta resultados mais precisos [5].

A partir deste ponto serão estudados alguns dos principais métodos de construção de um filtro FIR, a começar pelo método que utiliza truncamento de séries de Fourier.

### 3.4.2.1. Construção de Filtros FIR baseado em Truncamento de Série de Fourier

Há diferentes métodos de construir filtros FIR a partir de séries de Fourier, o primeiro e mais direto é o truncamento da série no  $N$ -ésimo termo, sendo estas as amostras do filtro FIR de ordem  $N$ . Outro método é um baseado em uma janela de observação de tamanho  $N$ , onde o filtro FIR de ordem  $N$  teria as suas amostras distintas como termos igualmente espaçados da serie de Fourier do filtro desejado [5].

### **Construção de Filtros FIR com Menor Erro Quadrático**

Se a função que denota a resposta em frequência desejada,  $H_d(e^{j\omega})$  é uma função periódica de  $\omega$  com período  $2\pi$ , pode ser expressa em série de Fourier como:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n} \quad (3.67)$$

Da mesma forma, a resposta ao impulso é dada por [5]:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.68)$$

A maior parte das respostas em frequência desejadas são filtros com uma faixa de passagem com ganho constante e outra com rejeição total com rápida transição entre as bandas. Estes requisitos implicam em respostas ao impulso infinitas e não-causais.

Na prática são necessárias respostas ao impulso de duração finita de tamanho  $2M + 1$  cuja DTFT se aproxima da função de transferência desejada. O erro médio quadrático é dado por:

$$\Phi_R = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_t(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.69)$$

onde,

$$H_t(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M h_d[n] e^{-j\omega n} \quad (3.70)$$

De acordo com a relação de Parseval, se pode reescrever a equação (3.69) como:

$$\Phi_R = \sum_{n=-M}^M |h_t[n] - h_d[n]|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-M-1} h_d^2[n] + \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d^2[n] \quad (3.71)$$

É possível notar que o valor mínimo de  $\Phi_R$  se dá quando  $h_t[n] = h_d[n]$  para  $-M < n < M$ , quando o resultado do primeiro somatório zera, o que significa dizer que o erro médio quadrático é mínimo quando  $h_t[n]$  é obtido por truncamento. Também é possível perceber que quanto maior o valor de  $n$ , menor o erro.

Um filtro causal pode ser obtido a partir de  $h_t[n]$ , a partir de um *delay* de  $M$  amostras, onde:

$$h[n] = h_t[n - M] \quad (3.72)$$

$h[n]$  possui a magnitude da resposta em frequência igual a  $h_t[n]$  e fase é linear deslocada de  $\omega M$  radianos em relação a  $h_t[n]$ .

### Resposta ao Impulso de Filtros Ideais e Reais

Como concluído, o filtro FIR realizável com menor erro quadrático é aquele que tem sua resposta ao impulso como um truncamento da resposta ao impulso de um filtro FIR ideal com um *delay* suficiente para torná-la causal [5].

A resposta ao impulso de um filtro passa-baixas ideal é dada por [5]:

$$h_{LP}[n] = \frac{\text{sen} \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.73)$$

Como visto, o filtro FIR de ordem  $2M + 1$  é um truncamento de  $h_{LP}[n]$  deslocado em  $M$  atrasos, de forma que a resposta ao impulso de um filtro FIR que se comporta como passa-baixas real é dada por:

$$h_{RLP}[n] = \frac{\text{sen}(\omega_c (n - M))}{\pi (n - M)}, \quad 0 \leq n \leq 2M \quad (3.74)$$

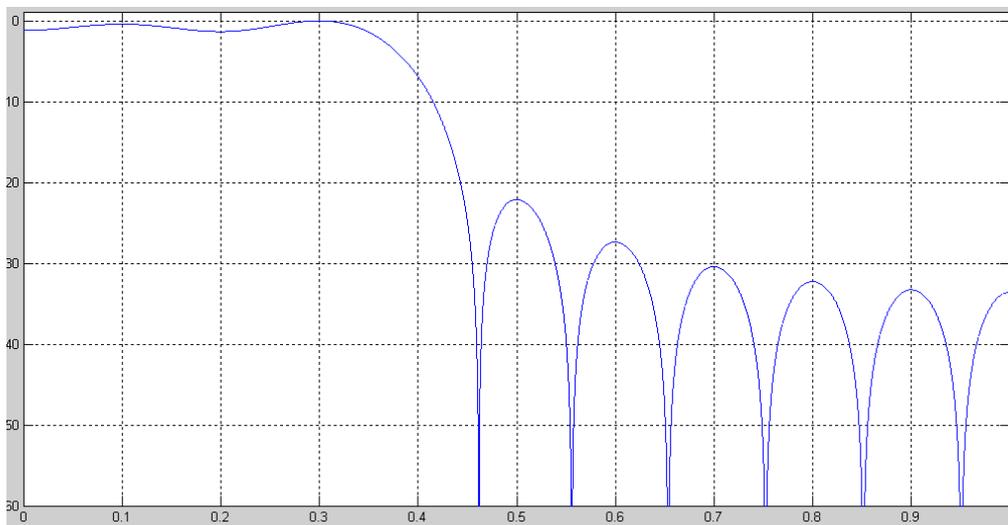
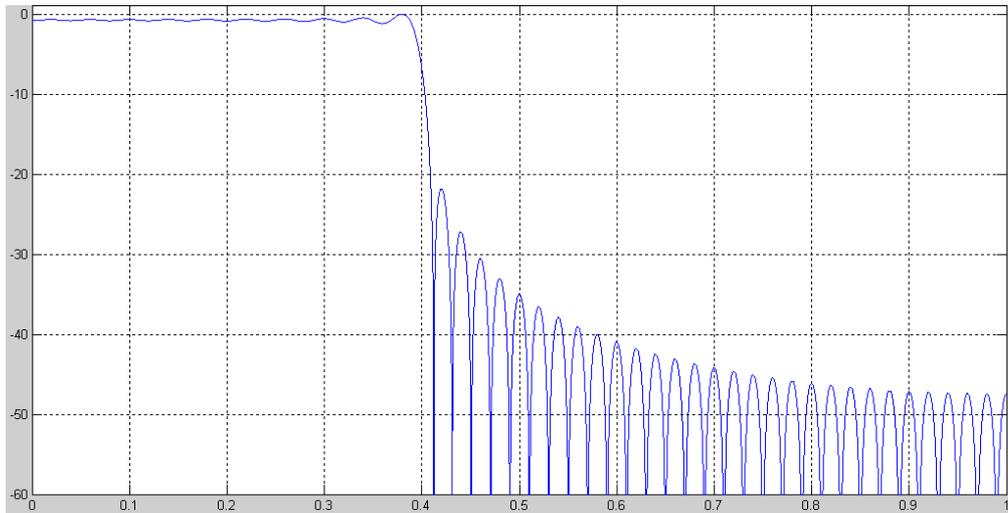


Figura 3.7 – Filtro FIR Passa Baixas de ordem 21.

Podem ser vistos nas Figuras (3.7) e (3.8) os efeitos do truncamento da função de transferência ideal é o aparecimento de *ripples* na banda de passagem e de rejeição, além de uma transição menos abrupta. É possível notar, também, que quanto maior a ordem do filtro, maior o número de *ripples*,

mais abrupta é a transição entre as bandas de transição e rejeição e há maior concentração da energia na banda passante.



**Figura 3.8 – Filtro FIR Passa Baixas de ordem 101**

Este aspecto oscilatório na resposta em frequência de filtros reais é chamado fenômeno de Gibbs [5]. A razão por trás deste fenômeno pode ser explicada considerando que o truncamento pode ser entendido como a multiplicação, no tempo, da função resposta ao impulso ideal com uma função do tipo *Gateway* em  $n$ ,  $w[n]$ , onde:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (3.75)$$

Sabe-se que:

$$h_{RLP}[n] = h_{LP}[n] \cdot w[n] \Leftrightarrow H_{RLP}(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

Uma função do tipo *Gateway* no tempo é uma função do tipo  $\text{Sa}(x) = \text{sen}(x)/x$  na frequência e a convolução da função  $\text{Sa}(x)$  com a resposta em frequência de um filtro ideal introduzirá as oscilações na função resposta em frequência resultante.

A função  $w[n]$  é freqüentemente chamada de função janela. Como a janela retangular, apresentada até agora, possui transição abrupta até 0, o fenômeno de Gibbs é maximizado quando este tipo de janela é utilizado. Uma alternativa é o uso de outros tipos de função janela que possuem transições mais suaves até o valor 0.

### **Funções que Utilizam Janela Fixa**

Os 4 tipos de janelas fixas mais comuns (além da retangular) são:

$$\text{Bartlett} : w[n] = 1 - \frac{|n|}{M+1} \quad (3.76)$$

$$\text{Hann} : w[n] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) \right] \quad (3.77)$$

$$\text{Hamming} : w[n] = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) \quad (3.78)$$

$$\text{Blackman} : w[n] = 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{2M+1}\right) \quad (3.79)$$

Onde  $-M \leq n \leq M$ , a Tabela (3.2) sumariza as características principais destas janelas.

**Tabela 3.2 – Comparativo entre as funções janela fixas.**

<b>Tipo de Janela</b>	<b>Atenuação Mínima na Banda de Rejeição</b>	<b>Largura da Banda de transição</b>
Retangular	20,9 dB	$0,92\pi/M$
Bartlett	-	-
Hann	43,9 dB	$3,11\pi/M$
Hamming	54,5 dB	$3,32\pi/M$
Blackman	75,3 dB	$5,56\pi/M$

Além dos métodos que utilizam janelas fixas, há métodos mais complexos que utilizam janelas ajustáveis, em geral, utilizadas para controlar as amplitudes das oscilações nas faixas de passagem e rejeição. Os dois principais métodos são: a janela de *Dolph-Chebyshev* e a janela de *Kaiser*. O estudo destes métodos está fora do escopo deste trabalho.

### 3.4.3. Construção de um Filtro IIR

A técnica mais comum para a construção de filtros IIR é converter as especificações do filtro digital para especificações de um filtro analógico passa-baixa padrão normalizado, determinar a função de transferência analógica que atenda tais especificações e então aplicar uma transformação conveniente para obter a função de transferência do filtro digital procurado.

A idéia básica por trás deste método é o mapeamento do eixo imaginário do plano  $s$  de Laplace no círculo unitário do plano  $z$ .

### 3.4.3.1. Método da Transformação Bilinear

A transformação bilinear do plano  $s$  para o plano  $z$  é dada por [5]:

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \text{ ou } z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \quad (3.80)$$

Como dito na seção anterior estamos especialmente interessados no mapeamento do eixo imaginário de  $s$  ( $s = j\Omega$ ) e o círculo de raio unitário do plano  $z$  ( $z = e^{j\omega}$ ) [5], que é:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.81)$$

É evidente que o mapeamento descrito não é linear, ele mapeia uma variável,  $\Omega$ , cujos valores estão no intervalo  $(-\infty; \infty)$  em outra variável,  $\omega$ , cujos valores estão no intervalo  $[0; 2\pi]$ . Esta não linearidade causa distorção na curva da magnitude de resposta em frequência, sendo necessária a introdução de um filtro para pré-distorcer o sinal e cancelar o efeito do mapeamento não linear [5].

É importante mencionar que esta transformação preserva a magnitude da resposta em frequência, mas não a fase desta [5].

A teoria de construção de filtros analógicos não faz parte do escopo deste trabalho. Já existem diversos formatos de solução fechados que vão de encontro às principais especificações de ordem prática [5].

De uma maneira geral, a seguinte seqüência de passos pode ser utilizada para a construção de um filtro digital a partir de um conjunto de especificações usando o método da transformação bilinear [5].

- Utilizando a Equação (3.81) achar as especificações de frequência analógicas a partir das especificações de frequências digitais dadas.
- Converter as frequências analógicas obtidas no passo anterior para aquelas equivalentes à de um protótipo passa-baixa normalizado.

- Obter a equação da função de transferência analógica que atenda às especificações do filtro passa-baixa normalizado.
- Converter a função de transferência do filtro passa-baixa normalizado, obtida no passo anterior, através de conversão adequada para obter a função de transferência analógica que atenda as especificações obtidas no passo 1.
- Utilizar a equação (3.80) da transformação bilinear para obter a função de transferência digital que atende ao conjunto de especificações inicial.

É importante perceber que o penúltimo e último passo podem ser invertidos, ou seja, pode-se aplicar a equação da transformação bilinear na função de transferência do filtro passa-baixa normalizado, obtendo a função de transferência digital de um filtro passa-baixa normalizado e depois, através de conversão adequada, obter a função de transferência digital que atende ao conjunto de especificações inicial [5].

### 3.4.3.2. Transformações de Espectro de Filtros IIR

É comum que após o desenvolvimento de um filtro, se deseje desenvolver outro parecido com o primeiro, tendo como diferença apenas, por exemplo, o tamanho da banda passante [5].

Sendo  $\mathbf{G}(\mathbf{z})$  a função de transferência de um filtro passa-baixa digital e  $\mathbf{H}(\mathbf{z}_1)$  a função de transferência do filtro digital que se deseja obter a partir de  $\mathbf{G}(\mathbf{z})$ . Existe uma transformação do domínio de  $\mathbf{z}$ , para o domínio de  $\mathbf{z}_1$  de forma que [5]:

$$z = F(z_1) \quad \therefore \quad H(z_1) = G(F(z_1)) \quad (3.82)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1)$  precisa ser uma função do tipo passa-tudo, estável e de coeficientes reais e para isso  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1)$  tem a seguinte forma geral [5]:

$$F(z_1) = \pm \prod_{k=1}^L \left( \frac{z_1 - \lambda_k}{1 - \lambda_k^* z_1} \right) \quad (3.83)$$

Na Tabela (3.3) pode-se ver o conjunto das principais transformações espectrais para filtros IIR digitais [5].

**Tabela 3.3 – Transformações para um filtro passa-baixa com frequência de corte  $\omega_c$**

Tipo de Filtro	Transformação Spectral	Parâmetros
Passa-Baixa	$z^{-1} = \frac{z_1^{-1} - \lambda}{1 - \lambda z_1^{-1}}$	$\lambda = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega_c - \omega_{1c}}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega_c + \omega_{1c}}{2}\right)}$
Passa-Alta	$z^{-1} = -\frac{z_1^{-1} + \lambda}{1 + \lambda z_1^{-1}}$	$\lambda = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega_{1c}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega_{1c}}{2}\right)}$
Passa-Banda	$z^{-1} = -\frac{z_1^{-2} - \frac{2\lambda\rho}{\rho+1}z_1^{-1} + \frac{\rho-1}{\rho+1}}{\frac{\rho-1}{\rho+1}z_1^{-2} - \frac{2\lambda\rho}{\rho+1}z_1^{-1} + 1}$	$\lambda = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{2c} + \omega_{1c}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{2c} - \omega_{1c}}{2}\right)}$ $\rho = \cotg\left(\frac{\omega_{2c} - \omega_{1c}}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$
Rejeita Banda	$z^{-1} = -\frac{z_1^{-2} - \frac{2\lambda}{\rho+1}z_1^{-1} + \frac{1-\rho}{\rho+1}}{\frac{1-\rho}{\rho+1}z_1^{-2} - \frac{2\lambda}{\rho+1}z_1^{-1} + 1}$	$\lambda = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{2c} + \omega_{1c}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{2c} - \omega_{1c}}{2}\right)}$ $\rho = \tan\left(\frac{\omega_{2c} - \omega_{1c}}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$

### 3.5. Considerações Finais

Terminado este capítulo, tem-se a base teórica necessária que dá condições para que seja desenvolvido o estudo das técnicas de síntese de antenas. Tema do próximo capítulo.

## 4. Técnicas de Síntese de Antenas

### 4.1. Introdução à Síntese de Antenas

A teoria de síntese de antenas consiste no estudo de técnicas para se obter o arranjo de antenas que irradie um campo elétrico de acordo com especificações pré-estabelecidas. Existem diferentes métodos para a construção de antenas, alguns deles baseados na teoria de Eletromagnetismo e outros baseados na teoria de construção de filtros FIR, pois a equação da função de transferência de um filtro FIR é similar à equação do campo elétrico distante irradiado por uma antena [7].

Neste capítulo serão estudadas as principais técnicas de síntese antenas, para que se possa aplicá-las e obter conjuntos a partir de especificações dadas e então poder comparar estas técnicas a partir dos resultados obtidos.

No Capítulo 2 foram estudados os principais parâmetros das antenas, assim como suas principais equações. De [4], é sabido que o campo elétrico distante produzido por cada antena  $i$  de um conjunto linear pode ser representado em coordenadas esféricas por:

$$E_i(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) I_i e^{j(kx_i \cos \theta + \alpha_i)} \quad (4.1)$$

onde:

$f(\theta, \varphi)$  é chamado fator de elemento do conjunto,

$I_i$  é a corrente no elemento  $i$ ,

$k$  é o número de onda, ou  $2\pi/\lambda$ ,

$x_i$  é a posição do elemento  $i$  no eixo  $x$ ,

$\alpha_i$  é o atraso de fase na alimentação do elemento  $i$ .

O campo elétrico total será a soma dos campos gerados por cada antena do conjunto, expresso da seguinte maneira [4]:

$$E(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^n E_i(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \sum_{i=1}^n I_i e^{j(kx_i \cos \theta + \alpha_i)} \quad (4.2)$$

Do Capítulo 2, tem-se que:

$$E(\theta, \phi) = f(\theta, \phi) S$$

Onde  $S$  representa o fator do campo elétrico devido ao conjunto e pode ser escrito como [4]:

$$S = \sum_{i=1}^n I_i e^{j(kx_i \cos \theta + \alpha_i)} = \sum_{i=1}^n I_i z^{-i} \quad (4.3)$$

onde:

$$z = e^{-ju} \text{ e } u = kx_i \cos \theta + \alpha_i$$

Considerando que os conjuntos são uniformes, ou seja, cada elemento está igualmente espaçado de seus adjacentes e o módulo da corrente que alimenta cada elemento de corrente é igual e possui defasamento linear entre eles (corrente uniformemente progressiva), pode-se escrever:

$$x_i = id \text{ e } \alpha_i = -ikd \cos \theta_0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.4)$$

A variável  $u$  pode ser reescrita como:

$$u = kd(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4.5)$$

Onde  $\theta_0$  é a direção de máxima irradiação do conjunto.

## 4.2. Métodos de Síntese Baseados na Teoria Eletromagnética

Nesta seção serão estudados alguns dos principais métodos para síntese de antenas baseados na teoria eletromagnética. Mas antes, será visto um método de mudança de variáveis utilizado para facilitar a matemática utilizada nos métodos de síntese a serem vistos nesta seção.

A Equação (4.3) pode ser aproximada por uma função polinomial de uma nova variável  $y$  [6]. O polinômio não é único e depende da forma como é distribuída a corrente de alimentação através dos elementos. Uma ressalva importante é que os elementos devem ser distribuídos uniformemente no conjunto, ou seja,  $x_i = id$ . Quando o conjunto é alimentado com corrente uniformemente progressiva, ele é denominado de  $P_U(y)$ , onde:

$$P_U(y) = \sum_{m=0}^{n-1} A_m y^m \quad (4.6)$$

$$\text{onde } y = z + z^{-1} = 2 \cos u \text{ e } A_m = \sum_{i=0}^{n-1-m} I_i I_{m+i}.$$

As posições dos nulos e de máximos no diagrama de potência serão dadas respectivamente por:

$$P_U(y) = 0 \text{ e } \frac{d}{dy} P_U(y) = 0 \quad (4.7)$$

Para que o conjunto seja realizável, ou seja, para que o polinômio represente a potência irradiada de um conjunto real,  $P(y) \geq 0$ , com  $-2 \leq y \leq 2$  [6] e [8]. Para que estas regras sejam obedecidas,  $P(y)$  deve ser uma combinação dos seguintes polinômios elementares [8]:

$$\begin{aligned} (i) & (y+c_i) \text{ ou } (c_i-y) \text{ com } c_i \in \mathfrak{R} \text{ e } c_i \geq 2 \\ (ii) & (y+c_i)^2 \text{ com } c_i \in \mathfrak{R} \text{ e } |c_i| \leq 2 \\ (iii) & (y^2 + 2c_{i1}y + c_{i1}^2 + c_{i2}^2) \text{ com } c_{i1} \in \mathfrak{R} \text{ e } c_{i2} \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Que correspondem aos seguintes campos elétricos distantes:

$$\begin{aligned} (i) & E_i(z) = \frac{1}{\sqrt{c'_i}}(1+c'_i z^{-1}) \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{c'_i}}(1-c'_i z^{-1}) \\ (ii) & E_i(z) = 1 + c_i z^{-1} + z^{-2} \\ (iii) & E_i(z) = \frac{1}{\sqrt{c'_{i1}c'_{i2}}} [1 + (c'_{i1} + c'_{i2})z^{-1} + c'_{i1}c'_{i2}z^{-2}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

com,

$$\begin{aligned} c'_i &= \frac{1}{2}(c_i \pm \sqrt{c_i^2 - 4}) \\ c'_{i1} &= \frac{1}{2}[c_{i1} + jc_{i2} \pm \sqrt{(c_{i1} + jc_{i2})^2 - 4}] \\ c'_{i2} &= \bar{c}'_{i1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

A montagem do polinômio  $P(y)$  depende no número de elementos do conjunto,  $n$ . A fórmula para  $n$  ímpar (*odd*) e par (*even*) é dada, respectivamente, por [8]:

$$P_o(y) = \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (y+c_i)^2, \text{ para } n \text{ ímpar} \quad (4.11)$$

$$P_e(y) = (y+2) \prod_{i=1}^{(n-2)/2} (y+c_i)^2, \text{ para } n \text{ par} \quad (4.12)$$

Que correspondem, respectivamente, aos seguintes campos elétricos em função de  $z$ :

$$E_o(z) = \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (1+c_i z^{-1} + z^{-2}) \quad (4.13)$$

$$E_0(z) = (1+z^{-1}) \prod_{i=1}^{(n-2)/2} (1+c_i z^{-1} + z^{-2}) \quad (4.14)$$

#### 4.2.1. Método da Interpolação

Este método consiste em, dado um padrão de potência desejado, descobrir um conjunto de antenas capaz de reproduzir tal padrão com algum erro tolerado [6]. Este problema é convencionalmente resolvido, expandindo  $F(u)$ , a função que determina a forma de irradiação de potência no espaço, em séries de Fourier e aproximando pelos primeiros  $N$  termos da série.

As condições de uso para este método são que  $d = \lambda/2$  ou  $kd = \pi$  e a região visível de  $u$  deve ser exatamente igual a  $2\pi$ .

Dado um diagrama arbitrário  $f(\delta)$ , ele pode ser expresso como  $F(u)$  ou  $g(y)$ , onde:  $u = kdcos(\theta) + \alpha$  e  $y = 2cosu$ .

O objetivo é encontrar um  $P(y)$  tão próximo de  $g(y)$  quanto possível com a menor complexidade possível. Se o diagrama de irradiação especificado for uma função par de  $u$ , então ela pode ser realizada por um conjunto de antenas alimentada por uma corrente com fase uniformemente progressiva [6].

A seguir serão vistos alguns métodos de interpolação conhecidos.

##### 4.2.1.1. Interpolação Polinomial

O primeiro cuidado a se tomar é que, para que  $P(y)$  seja realizável então  $P(y) \geq 0$ , em  $-2 \leq y \leq 2$  [8].

Em geral, para um dado padrão de irradiação  $G(x)$ , é possível obter  $n$  amostras  $G(x_0), G(x_1), \dots, G(x_{n-1})$ , nos respectivos  $n$  valores de  $x$ :  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , sob um intervalo normalizado  $[-1, 1]$ . Utilizando a fórmula de interpolação de Lagrange, é possível encontrar uma função polinomial  $L(x)$  que assumirá os mesmos valores da função  $G(x)$ , nos pontos onde as amostras foram obtidas [8].  $L(x)$  é dada pela equação (4.15).

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi(x)G(x_i)}{(x-x_i)\pi'(x_i)} \quad (4.15)$$

onde,

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (4.16a)$$

$$-1 \leq x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \leq 1 \quad (4.16b)$$

$$\pi'(x_i) = \left. \frac{d\pi(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad (4.16c)$$

Para que  $L(x)$  convirja uniformemente a  $G(x)$ , é necessário que os pontos onde a função será amostrada sejam escolhidos convenientemente. Há duas formas convenientes de se escolher os pontos onde serão colhidas as amostras, são elas: os zeros do polinômio de Chebyshev ou os zeros do polinômio de Legendre, como explicado em [6].

#### **Amostras $x_i$ coincidentes com os zeros do polinômio de Chebyshev**

O polinômio de Chebyshev de grau  $n$  é definido por:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (4.17)$$

Dessa forma:

$$x_{n-1-i} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (4.18)$$

Da equação (4.18), pode ser deduzido que os valores das amostras  $x_i$  sempre estarão no intervalo  $[-1, 1]$ .

#### **Amostras $x_i$ coincidentes com os zeros do polinômio de Legendre**

O polinômio de Legendre de grau  $n$  é definido por:

$$p_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (4.19)$$

Como  $p_n(x)$  é uma função tabelada, fica fácil descobrir os pontos onde as amostras devem ser obtidas.

Ao se obter  $L(x)$ , através de um dos processos apresentados acima, ele deve ser convertido em  $P_U(y)$ , fazendo  $y = 2x$ . Dessa forma o diagrama de irradiação de potência é obtido. De posse da informação do padrão de potência, os campos elétricos podem ser calculados e por sua vez as correntes de alimentação dos elementos.

#### **4.2.1.2. Interpolação Trigonométrica**

Quando os valores de uma função em pontos eqüidistantes são dados, é muito útil usar o método da interpolação trigonométrica [6] e [8]. Nestes casos, este método é simples, direto e converge muito bem. Se as expressões que definem o diagrama de potência forem dadas em termos de funções transcendentais, assume-se que a função a ser interpolada,  $F(u_i)$ , seja conhecida, onde:

$$u_i = \frac{i\pi}{n-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (4.20)$$

Vale ressaltar que  $u$  varia no intervalo  $[0, \pi]$ , que foi dividido igualmente em  $n - 1$  intervalos. Isso implica que um intervalo genérico  $[-kd + \alpha, kd + \alpha]$  deve ser transformado para  $[0, \pi]$ .

A função  $F(u)$  deve ser reescrita como a soma de sua componente par e sua componente ímpar.

$$F(u) = F_p(u) + F_i(u) \quad (4.21)$$

onde,

$$F_p(u) = \frac{1}{2}[F(u) + F(-u)] \text{ e } F_i(u) = \frac{1}{2}[F(u) - F(-u)]$$

A partir daí  $S(u)$ , a função que aproxima  $F(u)$ , pode ser obtida através das seguintes fórmulas de interpolação [8]:

$$S(u) = S_p(u) + S_i(u) \quad (4.22)$$

onde,

$$S_p(u) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos u + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} \cos(n-1)u$$

$$S_i(u) = b_1 \text{ sen } u + b_2 \text{ sen } 2u + \dots + b_{n-2} \text{ sen}(n-2)u$$

com,

$$a_k = \frac{2}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} F_{par}(u_i) \cos \frac{ki\pi}{n-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (4.23)$$

$$b_k = \frac{2}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} F_{impar}(u_i) \text{ sen } \frac{ki\pi}{n-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-2) \quad (4.24)$$

#### 4.2.2. Método da Transformada Inversa de Z [8]

Há muitas vantagens no uso da teoria da transformada  $Z$  na análise de conjuntos lineares, onde as amplitudes de excitação de corrente não são iguais.

Esse recurso permite transformar o conjunto polinomial de  $n$  termos em um uma razão finita sobre a qual a análise, então, se sucede. O objeto de estudo será o problema inverso, ou seja, a síntese de conjuntos lineares aplicando a transformada  $Z$  inversa [8].

$$\left| E(z, z^{-1}) \right|^2 = E(z) \overline{E(z)} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} I_i z^{-i} \right) \left( \sum_{i=0}^{n-1} I_i z^i \right) \quad (4.25)$$

onde  $I_i$  representa as amplitudes de excitação de corrente do conjunto e é sempre real. Do ponto de vista da análise, assumindo o valor de  $I_i$ ,  $|E|^2$  pode ser calculado de maneira direta.

Em casos práticos, o padrão desejado, expresso em função de  $\theta$ , é geralmente especificado. Dessa forma, os seguintes passos devem ser seguidos:

- Tentar obter  $|E|^2$  como função de  $z$  e  $z^{-1}$  do padrão especificado;
- Extrair  $E(z)$  e  $\overline{E(z)}$  da relação acima, sabendo que  $E(z) \overline{E(z)} = |E|^2$ .
- Determinar os valores de  $I_i$ , fazendo com que  $\sum_{i=0}^{n-1} I_i z^{-i}$  se aproxime de  $E(z)$  dentro de um limite de erro tolerável.

Geralmente, o primeiro passo não envolve aproximação, uma vez que é meramente uma transformação de variáveis. O segundo passo também é exato se  $|E|^2$  puder ser separado em duas componentes que são, respectivamente, funções isoladas de  $z$  e  $z^{-1}$ . Então, designa-se uma componente como  $E(z)$  e a outra como  $\overline{E(z)}$ . A aproximação que é envolvida no terceiro passo será mostrada por fim.

Se o fator  $E(z)$  é uma função analítica e regular na origem, pode-se expandi-lo como:

$$E(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (4.26)$$

onde os coeficientes  $c_p$  podem ser determinados por um dos métodos:

$$c_p = \frac{1}{j2\pi} \int_{\Gamma} E(z) \cdot z^{p-1} dz \quad (4.27)$$

A Equação (4.27) é igual ao somatório dos resíduos de  $E(z)z^{p-1}$  em  $p = 0, 1, 2, \dots$ , ou:

$$c_p = \frac{1}{p!} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} (z^{p-1} E(z)) \quad (4.28)$$

A Equação (4.27) é conhecida como o método dos resíduos, onde  $\Gamma$  é o contorno fechado englobando as singularidades de  $E(z)$ , mas não incluindo o infinito, sendo o sentido de integração anti-horário. As relações seguintes são obtidas pelo método da série de potências. Estritamente falando, a expressão de  $E(z)$  é representada por uma série infinita. Fisicamente, isso quer dizer que um conjunto com um número infinito de elementos (onde  $c_p$  corresponde às amplitudes de excitações de corrente) deveria ser construído para se produzir um padrão de potência  $E(z)$  exato, livre de erros. Na prática, pode-se atingir apenas um número finito de elementos no conjunto,  $n$ . O método de síntese é realizado determinando-se  $c_p$  onde  $p = n - 1$  são as excitações requeridas  $I_i$ , sendo o erro igual à soma dos termos desprezados.

### 4.3. Métodos de Síntese baseados na Teoria de Processamento de Sinais [3], [7] e [11]

É possível utilizar técnicas de Processamento de Sinais no processo de síntese de antenas para se obter conjuntos espaçados, ou seja, conjuntos com alguns elementos nulos. Dessa forma, obtém-se como resultado um conjunto com um menor número de elementos, tornando a solução menos complexa e mais econômica [3].

Para uma antena do tipo *array* unidimensional, cujos elementos são espaçados uniformemente e alimentados com correntes de mesmo módulo e diferença de fase linear, muito utilizada em radares e em ultrassons, a expressão matemática para o seu campo elétrico distante é bastante similar à de um filtro FIR. Assim, é possível utilizar as técnicas de síntese de filtros FIR para síntese de *arrays* de antenas.

$$E(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \cdot e^{j \left[ \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta \right] n} \quad (4.29)$$

onde,  $w[n]$  é a expressão de corrente do  $n$ -ésimo elemento e  $\theta$  o ângulo a partir do plano  $xy$ .

Esta expressão pode ser encarada como a resposta em frequência de um filtro FIR de tamanho  $N$ .

#### 4.3.1. Conceito de *Arrays* Espaçados

O conceito de *arrays* espaçados é a retirada de elementos de um *array* linear uniformemente espaçado, criando uma espécie de “buraco” no conjunto de antenas, reduzindo a quantidade de elementos utilizados para criar o conjunto [3].

Vale lembrar que esta ação implica em aumento do nível de lobo lateral, ou seja, aumenta a quantidade de energia emitida na direção do segundo máximo, porém, a escolha adequada dos elementos a serem removidos reduz este efeito.

Em muitas aplicações, como no caso do ultrassom, é utilizado um conjunto de antenas na recepção e um outro conjunto de antenas de transmissão, tendo assim, dois diagramas de irradiação distintos.

Na maior parte das aplicações, a informação que interessa é o que chamamos de abertura efetiva, ou o diagrama efetivo, que é a convolução do diagrama de transmissão com o de recepção. Em  $z$  temos:

$$E_{eff}(z) = E_T(z) \times E_R(z) \quad (4.30)$$

Onde a expressão para  $E$  em  $\theta$  é a dada na Equação (4.29) que é função também de  $n$ , e dessa forma, tem-se que:

$$E_{eff}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} w_{eff}[n] \cdot z^{-n} \quad (4.31)$$

com,

$$E_T(z) = \sum_{n=0}^{L-1} w_T[n] \cdot z^{-n} \text{ e } E_R(z) = \sum_{n=0}^{M-1} w_R[n] \cdot z^{-n} \quad (4.32)$$

e,

$$w_{eff}[n] = w_R[n] * w_T[n] \quad (4.33)$$

onde:

$w_R[n]$  é a expressão da corrente elétrica de alimentação do  $n$ -ésimo elemento da antena de recepção.

$w_T[n]$  é a expressão da corrente elétrica de alimentação do  $n$ -ésimo elemento da antena de transmissão.

$L$  é o número total de elementos do conjunto antena de transmissão

$M$  o número total de elementos do conjunto antena de recepção.

Os valores de  $L$  e  $M$  incluem os elementos que tem alimentação nula, ou seja, que na prática não precisam existir. Para alguns tipos de projeto, as especificações são feitas em termos de diagrama efetivo (não havendo restrições específicas quanto ao diagrama de irradiação das antenas de transmissão ou recepção isoladamente), e tal diagrama efetivo pode ser obtido através de um conjunto de combinações de diagramas de irradiação de transmissão e recepção.

### 4.3.2. Método da Função de Abertura Linear

Um método simples e muito utilizado para se construir *arrays* de elementos unidimensionais é o método chamado de *apodized end elements* [11]. Ele consiste em alimentar com correntes diferentes os elementos das pontas dos *arrays*, obedecendo a certos critérios de construção que serão vistos com mais detalhes a seguir.

Se na expressão da Equação (4.29), for feita a seguinte mudança de variáveis  $x = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\cos(\theta)}$ , então:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \cdot x^n \quad (4.34)$$

onde  $x = z^{-1}$

Então, pode-se escrever que:

$$E_{\text{eff}}(x) = E_T(x)E_R(x) = E_1(x)E_2(x) \quad (4.35)$$

Neste tipo de solução,  $E_1(x)$  e  $E_2(x)$  são dados pela Equação (4.36):

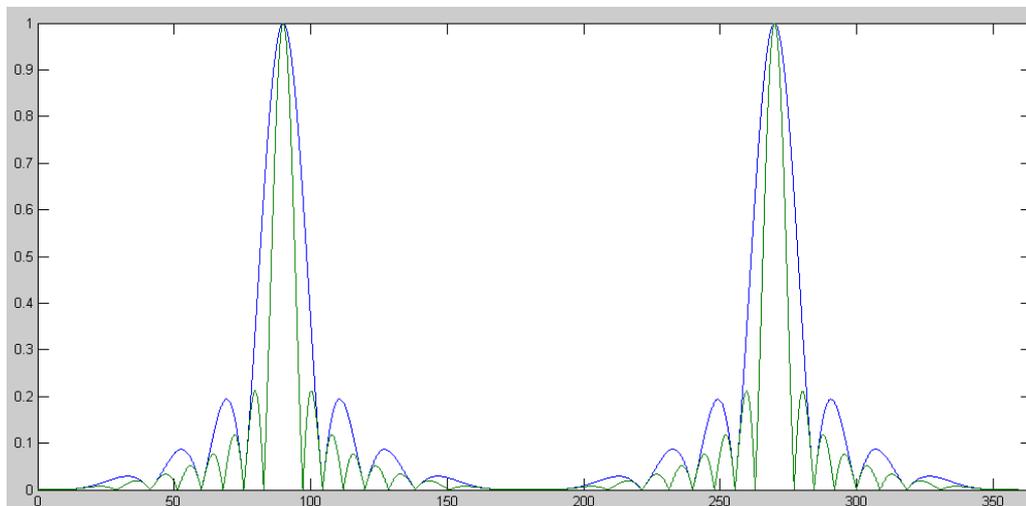
$$E_1(x) = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} x^i \text{ e } E_2(x) = \sum_{i=0}^{S-1} x^i \quad (4.36)$$

Ambos  $E_1(x)$  e  $E_2(x)$  são as mais simples equações de um filtro FIR de ordem  $R$  e  $S$ , respectivamente.

O número total de elementos de  $E_{\text{eff}}(x)$  será  $N = R + S - 1$  e o número de elementos com  $w[n] \neq 1$  será  $2(R - 1)$ , especificamente os primeiros e os últimos  $(R - 1)$  elementos, ou seja, os elementos das pontas.

Como condição para  $E_{\text{eff}}(x)$  ser realizável  $S \geq R$ , além disso, ambos devem ser inteiros e potência de 2 [11]. Para cada par de valores de  $S$  e  $R$ , existe um  $E_{\text{eff}}(x)$  associado. Os valores de  $S$  e  $R$  devem ser escolhidos de forma que  $E_{\text{eff}}(x)$  seja capaz de atender aos requisitos do projeto. Vale lembrar que  $E_{\text{eff}}(x)$  é uma função polinomial de  $x$ , e as funções de campo elétrico das antenas de transmissão e recepção são obtidas fatorando  $E_{\text{eff}}(x)$  e escolhendo convenientemente  $E_T(x) E_R(x)$ , de forma que,  $E_{\text{eff}}(x) = E_T(x) E_R(x)$ .

Uma observação interessante acerca desse método é que o aumento de  $S$ , ou seja, a ordem de  $E_2(x)$  tem como principal efeito a redução da largura de banda de irradiação do feixe, enquanto o aumento de  $R$  tem como principal efeito a redução do nível de lobo lateral (NLL). Este efeito pode ser observado nas Figuras (4.1), (4.2) e (4.3).

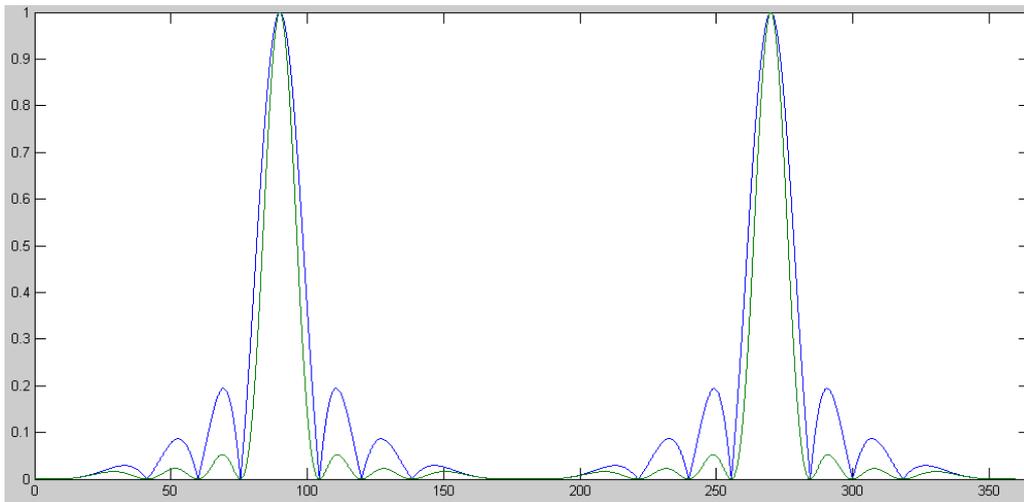


**Figura 4.1 –  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 2$  e  $S = 8$  (azul) e  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 2$  e  $S = 16$  (verde)**

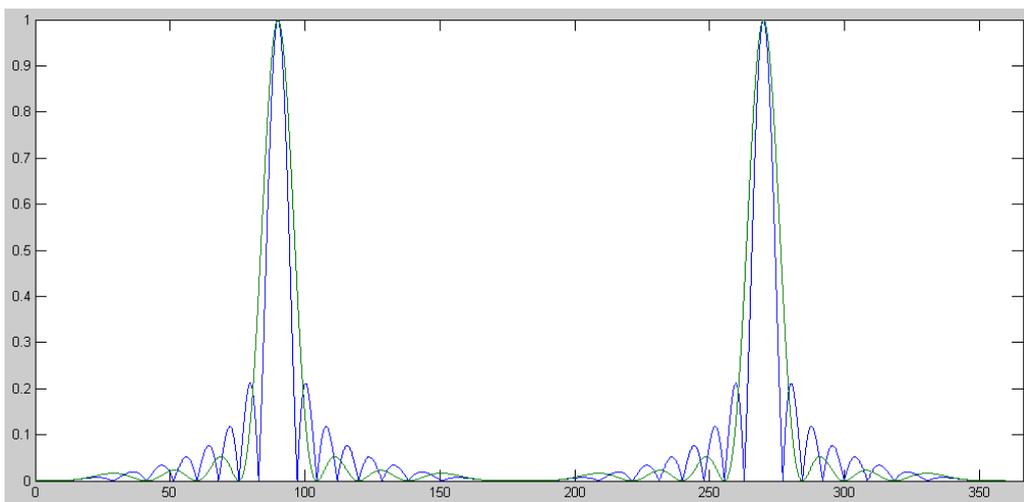
A Figura (4.1) mostra as curvas de  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 2$  e  $S = 8$  ( $N = 9$ ) e  $R = 2$  e  $S = 16$  ( $N = 17$ ) para que se possa ilustrar o efeito causado com o aumento de  $S$ . Pode-se perceber que o aumento de  $S$  estreita o diagrama (torna-o mais diretivo), aumenta o número de lobos laterais e reduz o NLL, pois o primeiro lobo possui uma amplitude maior quando  $S$  é maior.

A Figura (4.2) mostra as curvas de  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 2$  e  $S = 8$  ( $N = 9$ ) e  $R = 8$  e  $S = 8$  ( $N = 15$ ) para que se possa ilustrar o efeito causado com o aumento de  $R$ . É possível notar que o principal efeito causado pelo aumento de  $R$  é a redução do NLL, a quantidade de energia nos lobos secundários é bem menor quando comparada a curva com  $R$  menor. Também há redução na banda de

meia-potência, mas esta é bem menor quando comparada a redução devido ao aumento do valor de  $S$ .



**Figura 4.2 –  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 2$  e  $S = 8$  (azul) e  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 8$  e  $S = 8$  (verde)**



**Figura 4.3 –  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 2$  e  $S = 16$  (azul) e  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 8$  e  $S = 8$  (verde)**

Por fim, a Figura (4.3) compara as curvas de  $E_{\text{eff}}(x)$  para  $R = 8$  e  $S = 8$  (curva com  $R$  aumentado) e  $R = 2$  e  $S = 16$  (curva com  $S$  aumentado). A principal diferença entre as curvas, geradas por polinômios praticamente da mesma ordem (15 contra 17), é que enquanto a primeira possui menor NLL o segundo possui um feixe mais estreito.

### 4.3.3. Método da Função de Abertura *Staircase* [11]

Outro método utilizado para se construir *arrays* de elementos de antenas unidimensionais é o método chamado Função de Abertura *Staircase*. Este

método também consiste em alimentar os elementos das pontas com uma corrente diferente em relação aos elementos do meio do *array*. Há duas formas de construir um par de conjuntos com função de abertura efetiva em *staircase*, com números de elementos pares e ímpares.

#### 4.3.3.1. Números de Elementos Pares

Para este tipo de construção de *arrays*, a fórmula utilizada para obtenção de  $E_1(x)$ , é dada pela seguinte equação [11]:

$$E_1(x) = \frac{1}{2l+1} \left[ 1 + x^{k_1} (1 + x^{k_2} (1 + \dots + x^{k_l} (1 + x^{k_{l-1}} (1 + \dots + x^{k_2} (1 + x^{k_1})))) \right] \quad (4.37)$$

O número de elementos de  $E_1(x)$  é dado por:

$$R = 2 \sum_{i=1}^l k_i + 1 \quad (4.38)$$

$E_2(x)$  é dado pela mesma expressão da equação (4.30) e para que a função seja realizável, mais uma vez  $S \geq R$ . O número de elementos também é dado por  $N = R + S - 1$ ,  $S$  também deve ser um inteiro e uma potência de 2.

#### 4.3.3.2. Números de Elementos Ímpares

Para este tipo de construção de *arrays*, a fórmula utilizada para obtenção de  $E_1(x)$ , é dada pela seguinte equação:

$$E_1(x) = \frac{1}{2l} \left[ 1 + x^{k_1} (1 + x^{k_2} (1 + \dots + x^{k_l} (1 + x^{k_{l-1}} (1 + \dots + x^{k_2} (1 + x^{k_1})))) \right] \quad (4.39)$$

O número de elementos de  $E_1(x)$  é dado por:

$$R = 2 \sum_{i=1}^{l-1} k_i + k_l + 1 \quad (4.40)$$

$E_2(x)$  é dado pela mesma expressão da equação (4.30) e para que a função seja realizável, mais uma vez  $S \geq R$ . O número de elementos também é dado por  $N = R + S - 1$ ,  $S$  também deve ser um inteiro e uma potência de 2.

### 4.4. Conjuntos Planares

Os métodos de síntese vistos até aqui abordam como construir um conjunto de antenas unidimensional. Em outras palavras, dado um conjunto de especificações de irradiação em um determinado plano (horizontal ou vertical) é possível descobrir um conjunto linear (unidimensional) de antenas que atenda aquele conjunto de especificações.

Há diversas aplicações cujas especificações de irradiação englobam os planos horizontal e vertical simultaneamente. Para estes casos as especificações que dizem respeito à irradiação nos planos horizontal e vertical são tratadas de forma independente, ou seja, se obtém um conjunto linear que atenda as especificações de irradiação no plano horizontal e outro conjunto linear que atenda as especificações de irradiação no plano vertical, considerando que os conjuntos são uniformes, tem-se [6]:

$$E(\varphi, \theta) = f(\varphi, \theta)S_x S_y \quad (4.41)$$

onde:

$E(\varphi, \theta)$  é a equação do campo elétrico que atende as especificações de irradiação nos planos vertical e horizontal.

$f(\varphi, \theta)$  é o fator de elemento.

$S_x$  é a parcela do campo elétrico devido ao fator de conjunto posicionado horizontalmente (ao longo do eixo  $x$ ) e que atenderá as especificações de irradiação no plano horizontal.

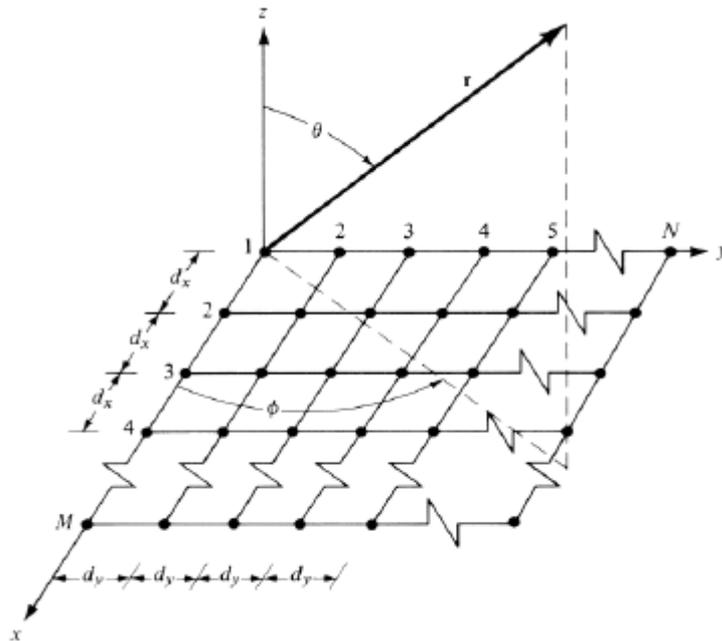
$S_y$  é a parcela do campo elétrico devido ao fator de conjunto posicionado verticalmente (ao longo do eixo  $z$ ) e que atenderá as especificações de irradiação no plano vertical.

#### 4.4.1. Construção de um Conjunto Planar

Seja o conjunto de antenas  $C1$ , um conjunto linear e uniforme, cujo campo elétrico irradiado devido ao fator de conjunto é  $S_x$ , com  $M$  elementos, o módulo da corrente de alimentação do  $k$ -ésimo elemento igual à  $I_k$  com  $k = 1, \dots, M$  e que quando posicionados ao longo do eixo  $x$ , atendem ao conjunto de especificações  $Especl$  no plano horizontal. Agora, seja o conjunto de antenas  $C2$ , também linear e uniforme, cujo campo elétrico irradiado devido ao fator de conjunto é  $S_y$ , com  $N$  elementos, o módulo da corrente de alimentação do  $i$ -

ésimo elemento igual à  $J_i$  com  $i = 1, \dots, N$  e que quando posicionados ao longo do eixo  $z$ , atendem ao conjunto de especificações *Espec2* no plano Vertical.

O conjunto planar capaz de irradiar um campo elétrico cuja equação obedeça a relação dada pela Eq. (4.41) e atenda as especificações *Espec1* e *Espec2* simultaneamente é uma grade com  $M \times N$  elementos de antenas (irradiadores) posicionados no plano  $xy$  ( $M$  ao longo do eixo  $x$  e  $N$  ao longo do eixo  $y$ ), com o elemento de antena  $ki$  alimentado com a corrente  $I_{ki} = I_k J_i$  com  $k = 1, \dots, M$  e  $i = 1, \dots, N$  [6]. A Figura (4.4) ajuda a ilustrar como o arranjo deve ser feito [6].



**Figura 4.4 – Grade com  $M \times N$  elementos de antenas**

As seguintes relações devem ser seguidas:

- Horizontal:  $S_x = E(z)$ , com  $z = e^{-jmu}$  e  $u = kd_x \text{sen}(\theta) \text{cos}(\varphi) + \alpha_x$ , com  $m$  inteiro variando no intervalo  $[0 M-1]$ .
- Vertical:  $S_y = E(z)$ , com  $z = e^{-jnv}$  e  $v = kd_y \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi) + \alpha_y$ , com  $n$  inteiro variando no intervalo  $[0 N-1]$ .

onde:

$$k = 2\pi/\lambda.$$

$d_x$  a distância horizontal (eixo  $x$ ) entre elementos consecutivos.

$d_y$  a distância vertical (eixo  $y$ ) entre elementos consecutivos.

$\alpha_x = -kd_x \sin(\theta_0) \cos(\varphi_0)$ , a defasagem de corrente entre dois irradiadores adjacentes horizontalmente e na mesma posição verticalmente.

$\alpha_y = -kd_y \sin(\theta_0) \sin(\varphi_0)$ , a defasagem de corrente entre dois irradiadores adjacentes verticalmente e na mesma posição horizontalmente.

$(\theta_0, \varphi_0)$  define a direção de máxima irradiação do conjunto planar no espaço, em outras palavras, através da defasagem das correntes de alimentação dos elementos é possível ajustar a direção de máxima irradiação no espaço.

Vale ressaltar que as mesmas relações valem para o método da interpolação polinomial e para o método da função abertura linear, deve-se apenas atentar que a variável  $x$  do segundo método equivale a  $z^{-1}$  do primeiro método.

## 5. Implementação das Técnicas de Síntese de Antenas

### 5.1. Antenas para Uso em Radar

Neste capítulo serão aplicados os métodos de síntese estudados no Capítulo 4 à casos reais de especificações de antenas. O primeiro caso a ser analisado é o de antenas utilizadas em radar, mais especificamente um radar Monopulso, um exemplo deste tipo de antena está descrito em [1].

Este tipo de antena deve possuir largura de banda de meia potência da ordem de 2,5° no plano horizontal e entre 15° e 30° no plano vertical [8].

Um tipo de curva largamente utilizada nestes casos é a definida pela descrita na Equação (5.1) [4]:

$$f_N(u) = \frac{\text{sen}(Nu/2)}{N \text{sen}(u/2)} \quad (5.1)$$

Do Cap. 4, tem-se que:  $u = kd \cos(\theta) + \alpha$ , sendo assim, possível transformar a especificação da largura de banda em  $\theta$  para  $u$  e por fim para  $x$ . Considerando  $kd = \pi$  e  $\alpha = 0$ , tem-se:

$$\theta_{Max} = 90^\circ \quad \therefore \quad u_{Max} = 0^\circ \quad \text{e} \quad \theta_{HP} = 92,0^\circ \quad \therefore \quad u_{HP} = 6,2819^\circ$$

Deseja-se descobrir o menor valor de  $N$  na Equação (5.1) que atenda as especificações dadas, pois quanto menor o valor de  $N$  menor o número de elementos do conjunto a ser obtido. Há uma relação de proporcionalidade entre  $N$  e a quantidade de elementos necessários no conjunto de antenas para reproduzir a forma de onda da Equação (5.1) [8].

Dessa forma, utilizando o software Microsoft Office Excel (Excel), foi possível descobrir que o primeiro valor de  $N$  onde os valores da função dada pela Equação (5.1) atendem as especificações de largura de banda de meia potência é  $N = 30$ .

Para o plano vertical ter-se-á as seguintes condições:

$$\theta_{Max} = 90^\circ \quad \therefore \quad u_{Max} = 0^\circ \quad \text{e} \quad \theta_{HP} = 75^\circ \quad \therefore \quad u_{HP} = 46,5874^\circ$$

Mais uma vez utilizando o Excel, foi possível descobrir que o menor valor de  $N$  onde os valores da função dada pela Equação (5.1) atendem as

especificações é  $N = 4$ . Nas próximas seções serão aplicadas as técnicas síntese para a curva dada.

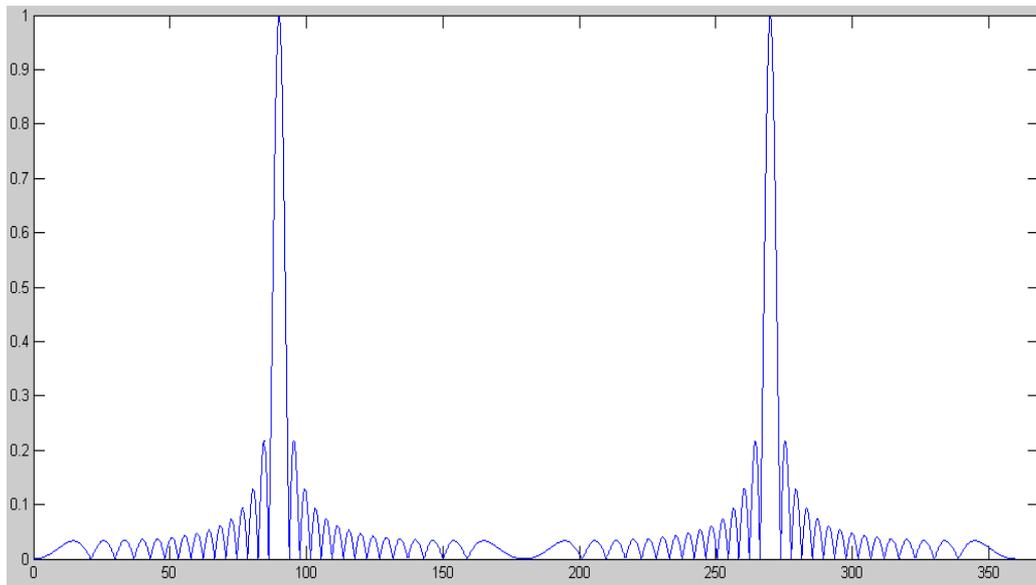
Como a intenção é analisar a eficiência dos métodos (cujas soluções apenas influenciam na parcela do campo elétrico devido ao conjunto), em todas as simulações foi considerado o uso de irradiadores isotrópicos, ou seja, considerou-se o campo elétrico devido ao fator de elemento, como sendo igual a 1, sendo dessa forma, o campo elétrico resultante no espaço, expresso pela Equação (4.41), pode ser escrito como o produto entre o fator de conjunto do *array* de antenas horizontal e o fator de conjunto do *array* de antenas vertical.

Conforme definido no Capítulo 2, o irradiador isotrópico irradia a mesma quantidade de potência em todas as direções, em outras palavras,  $f(\varphi, \theta) = 1$  [4].

### 5.1.1. Método da Interpolação Polinomial

#### 5.1.1.1. Diagrama Horizontal

Para a síntese do diagrama horizontal de radiação será utilizada como curva desejada aquela dada pela Equação (5.1), com  $N = 30$ , cuja forma é mostrada na Figura (5.1).



**Figura 5.1 – Curva da Equação (5.1) para  $N = 30$  que será interpolada**

O primeiro passo é criar uma tabela com a relação de amostras que serão utilizadas para a aplicação do método da interpolação polinomial. Após

algumas simulações no MATLAB, o resultado apresentou o menor erro médio quadrático em relação à curva modelo (dada pela Equação (5.1) para  $N = 30$ ) no lobo principal de irradiação e a menor quantidade de energia irradiada fora deste lobo principal foi quando a interpolação polinomial foi feita utilizando um polinômio Lagrange de grau 24 e os cálculos relativos a esta interpolação são mostrados a seguir:

Tabela 5.1 – Valores da Função amostra  $G(x_i)$

$i$	$x_i$	$y_i$	$u_i$	$\theta_i$	$G(x_i) = P(\theta_i)$
0	0,9980	1,9961	0,0628	1,5508	0,7349
1	0,9823	1,9646	0,1885	1,5108	0,0117
2	0,9511	1,9021	0,3142	1,4706	0,0454
3	0,9048	1,8097	0,4398	1,4303	0,0023
4	0,8443	1,6887	0,5655	1,3898	0,0093
5	0,7705	1,5410	0,6912	1,3490	0,0064
6	0,6845	1,3691	0,8168	1,3078	0,0007
7	0,5878	1,1756	0,9425	1,2661	0,0054
8	0,4818	0,9635	1,0681	1,2239	0,0004
9	0,3681	0,7362	1,1938	1,1810	0,0023
10	0,2487	0,4974	1,3195	1,1374	0,0019
11	0,1253	0,2507	1,4451	1,0928	0,0002
12	0,0000	0,0000	1,5708	1,0472	0,0022
13	-0,1253	-0,2507	1,6965	1,0004	0,0002
14	-0,2487	-0,4974	1,8221	0,9521	0,0012
15	-0,3681	-0,7362	1,9478	0,9021	0,0011
16	-0,4818	-0,9635	2,0735	0,8500	0,0001
17	-0,5878	-1,1756	2,1991	0,7954	0,0014
18	-0,6845	-1,3691	2,3248	0,7377	0,0001
19	-0,7705	-1,5410	2,4504	0,6761	0,0008
20	-0,8443	-1,6887	2,5761	0,6094	0,0008
21	-0,9048	-1,8097	2,7018	0,5355	0,0001
22	-0,9511	-1,9021	2,8274	0,4510	0,0011
23	-0,9823	-1,9646	2,9531	0,3482	0,0001
24	-0,9980	-1,9961	3,0788	0,2003	0,0007

De posse das informações das colunas 2 e 6 da Tabela (5.1), é aplicada a fórmula da interpolação polinomial de Lagrange [12] e [13] dada pela Equação (5.2):

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi(x)G(x_i)}{(x-x_i)\pi'(x_i)} \quad (5.2)$$

onde,

$$\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \text{ e } -1 \leq x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \leq 1$$

e se obtém a seguinte função polinomial:

$$\begin{aligned}
L(x) = & 0,37245x^{24} + 0,37321x^{23} - 1,9548x^{22} - 1,95932x^{21} + \\
& + 4,44332x^{20} + 4,44922x^{19} - 5,73797x^{18} - 5,72624x^{17} + \\
& + 4,64435x^{16} + 4,59869x^{15} - 2,454570x^{14} + \\
& - 2,391646x^{13} + 0,857291x^{12} + 0,809467x^{11} + \\
& - 0,196427x^{10} - 0,174651x^9 + 0,028810x^8 + \\
& + 0,022861x^7 - 0,002580x^6 - 0,001653x^5 + 0,000128x^4 \\
& + 0,000055x^3 - 0,0000027x^2 - 0,0000005x + 0,0000004
\end{aligned} \tag{5.3}$$

O próximo passo é obter  $P(y)$  a partir de  $L(x)$ , o que é feito a partir da substituição da variável  $x$  por  $y/2$ .

$$\begin{aligned}
P(y) = & y^{24} + 2,0041y^{23} - 20,994y^{22} - 42,085y^{21} + \\
& + 190,878y^{20} + 382,263y^{19} - 985,977y^{18} + \\
& - 1967,92y^{17} + 3192,23y^{16} + 6321,69y^{15} + \\
& - 6748,44y^{14} - 13150,9y^{13} + 9427,93y^{12} + \\
& + 17804,0y^{11} - 8640,70y^{10} - 15365,62y^9 + \\
& + 5069,31y^8 + 8045,30y^7 - 1815,57y^6 + \\
& - 2327,47y^5 + 360,272y^4 + 310,316y^3 + \\
& - 30,9403y^2 - 12,0789y + 17,0360
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ao ser fatorado,  $P(y)$  é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P(y) = & (y^2 + 3,7796y + 3,5864)(y + 2,0175) \\
& (y^2 + 3,2806y + 2,7329)(y^2 + 2,6026y + 1,7556) \\
& (y^2 - 3,8964y + 3,7955)(y^2 - 3,5366y + 3,1288) \\
& (y + 2,0000)(y^2 - 2,9296y + 2,1577) \\
& (y^2 + 1,7268y + 0,8163)(y^2 - 2,1444y + 1,1886) \\
& (y^2 - 1,2734y + 0,4738)(y^2 + 0,7184y + 0,2044) \\
& (y^2 - 0,3170y + 0,1033)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Com  $P(y)$  expresso desta forma, a cada termo são aplicadas relações expressas pelas as Equações (4.8), (4.9) e (4.10) para encontrar o campo elétrico associado a este polinômio. Os resultados para cada termo são mostrados a seguir.

$$1) P(y) = (y^2 + 3,7796y + 3,5864)$$

$c_1 = 1,8898$  e  $c_2 = 0,1227$ , que implica em:

$c'_1 = 1,1023 + 0,4297i$  e  $c'_2 = 1,1023 - 0,4297i$ , e em:

$$E(z) = 0,8423 + 1,8634z^{-1} + 1,1831z^{-2}$$

**2)**  $P(y) = (y + 2,0175)$

$$c_1 = 2,0175 \quad \therefore \quad c'_1 = 1,1413, \text{ que implica em:}$$

$$E(z) = 0,9360 + 1,0683z^{-1}$$

**3)**  $P(y) = (y^2 + 3,2806y + 2,7329)$

$$c_1 = 1,6403 \text{ e } c_2 = 0,2057, \text{ que implica em:}$$

$$c'_1 = 0,9612 + 0,7010i \text{ e } c'_2 = 0,9612 - 0,7010i, \text{ e em:}$$

$$E(z) = 0,8406 + 1,6159z^{-1} + 1,1897z^{-2}$$

**4)**  $P(y) = (y^2 + 2,6026y + 1,7556)$

$$c_1 = 1,3013 \text{ e } c_2 = 0,2494, \text{ que implica em:}$$

$$c'_1 = 0,7551 + 0,9013i \text{ e } c'_2 = 0,7551 - 0,9013i, \text{ e em:}$$

$$E(z) = 0,8504 + 1,2844z^{-1} + 1,1759z^{-2}$$

**5)**  $P(y) = (y^2 - 3,8964y + 3,7955)$

$$c_1 = -1,9482 \text{ e } c_2 = 0,0041, \text{ que implica em:}$$

$$c'_1 = -0,9653 - 0,2243i \text{ e } c'_2 = -0,9653 + 0,2243i, \text{ e em:}$$

$$E(z) = 1,0091 - 1,9481z^{-1} + 0,9910z^{-2}$$

**6)**  $P(y) = (y^2 - 3,5366y + 3,1288)$

$$c_1 = -1,7683 \text{ e } c_2 = 0,0438, \text{ que implica em:}$$

$$c'_1 = -0,8429 - 0,4476i \text{ e } c'_2 = -0,8429 + 0,4476i, \text{ e em:}$$

$$E(z) = 1,0477 - 1,7664z^{-1} + 0,9544z^{-2}$$

**7)**  $P(y) = (y + 2,0000)$

$$c_1 = 2,0000 \quad \therefore \quad c'_1 = 1,0000, \text{ que implica em:}$$

$$E(z) = 1,0000 + 1,0000z^{-1}$$

**8)**  $P(y) = (y^2 - 2,9296y + 2,1577)$

$c_1 = -1,4648$  e  $c_2 = 0,1098$ , que implica em:

$c'_1 = -0,6737 - 0,6307i$  e  $c'_2 = -0,6737 + 0,6307i$ , e em:

$$E(z) = 1,0836 - 1,4601z^{-1} + 0,9229z^{-2}$$

**9)**  $P(y) = (y^2 + 1,7268y + 0,8163)$

$c_1 = 0,8634$  e  $c_2 = 0,2662$ , que implica em:

$c'_1 = 0,4946 + 1,0470i$  e  $c'_2 = 0,4946 - 1,0470i$ , e em:

$$E(z) = 0,8636 + 0,8542z^{-1} + 1,1580z^{-2}$$

**10)**  $P(y) = (y^2 - 2,1444y + 1,1886)$

$c_1 = -1,0722$  e  $c_2 = 0,1923$ , que implica em:

$c'_1 = -0,4756 - 0,7556i$  e  $c'_2 = -0,4756 + 0,7556i$ , e em:

$$E(z) = 1,1201 - 1,0653z^{-1} + 0,8928z^{-2}$$

**11)**  $P(y) = (y^2 - 1,2734y + 0,4738)$

$c_1 = -0,6367$  e  $c_2 = 0,2616$ , que implica em:

$c'_1 = -0,2749 - 0,8272i$  e  $c'_2 = -0,2749 + 0,8272i$ , e em:

$$E(z) = 1,1473 - 0,6307z^{-1} + 0,8716z^{-2}$$

**12)**  $P(y) = (y^2 + 0,7184y + 0,2044)$

$c_1 = 0,3592$  e  $c_2 = 0,2745$ , que implica em:

$c'_1 = 0,2044 + 1,1309i$  e  $c'_2 = 0,2044 - 1,1309i$ , e em:

$$E(z) = 0,8702 + 0,3558z^{-1} + 1,1492z^{-2}$$

**13)**  $P(y) = (y^2 - 0,3170y + 0,1033)$

$c_1 = -0,1585$  e  $c_2 = 0,2796$ , que implica em:

$c'_1 = -0,0682 - 0,8669i$  e  $c'_2 = -0,0682 + 0,8669i$ , e em:

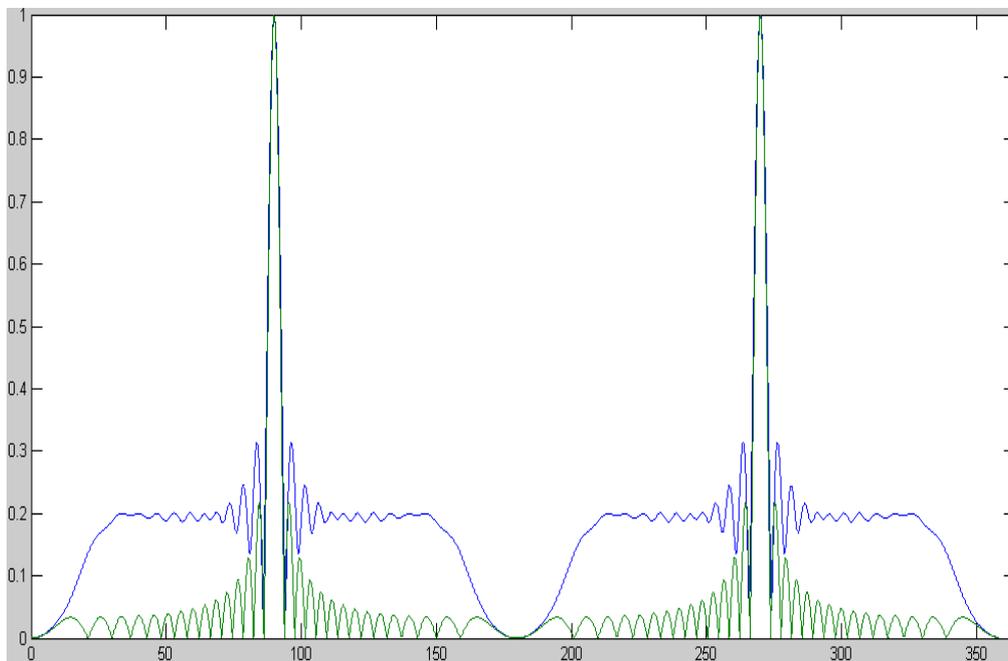
$$E(z) = 1,1500 - 0,1570z^{-1} + 0,8696z^{-2}$$

O campo elétrico  $E(z)$  final é o produto de cada campo elétrico calculado anteriormente. Ou seja:

$$\begin{aligned}
 E(z) = & 1 + 2,58299z^{-1} + 3,29309z^{-2} + 1,98252z^{-3} + \\
 & + 0,21764z^{-4} - 0,06283z^{-5} + 1,16312z^{-6} + \\
 & + 1,69928z^{-7} + 0,84092z^{-8} + 0,31996z^{-9} + \\
 & + 1,05000z^{-10} + 1,64989z^{-11} + 0,87261z^{-12} + \\
 & + 0,53593z^{-13} + 1,11065z^{-14} + 1,88704z^{-15} + \\
 & + 0,50143z^{-16} + 0,91475z^{-17} + 1,19633z^{-18} + \\
 & + 2,36898z^{-19} - 0,66473z^{-20} + 1,88839z^{-21} + \\
 & + 2,18715z^{-22} - 1,06042z^{-23} + 1,93828z^{-24}
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

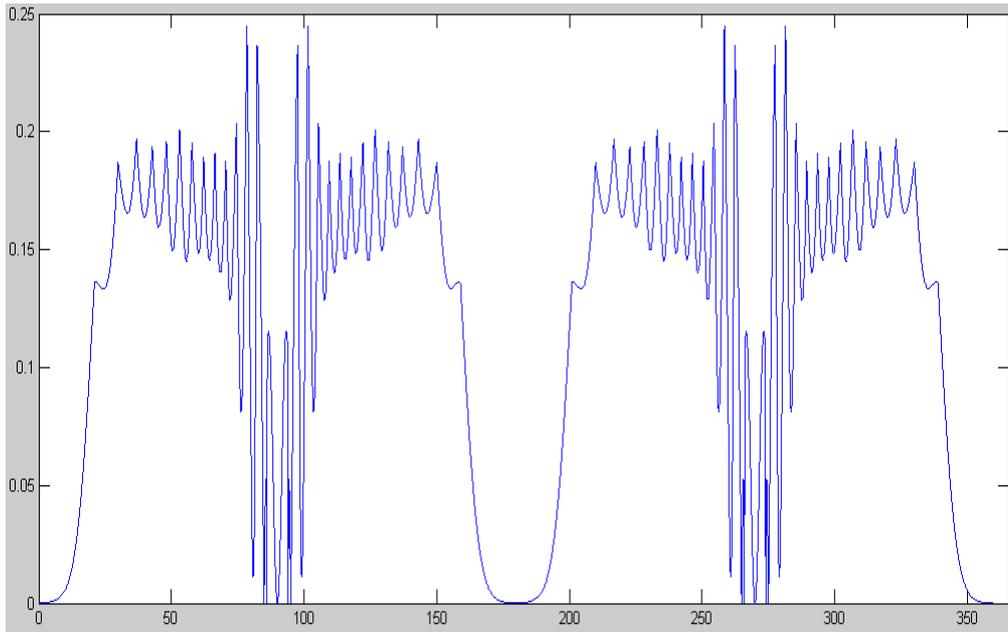
Da Equação (4.25), se pode concluir que o coeficiente que acompanha o termo  $z^{-i}$  é a corrente do  $i$ -ésimo elemento de antena. Isto implica em que um *array* de antenas formado por 25 irradiadores isotrópicos e com o mesmo espaçamento entre eles, sendo elemento de antena  $i$  alimentado por uma corrente elétrica de módulo igual ao coeficiente de  $z^{-i}$ , com  $i = 0, \dots, 24$  produzirá um campo elétrico próximo ao procurado.

A Figura (5.2) mostra as curvas geradas no MATLAB a partir da Equação (5.6) e da Equação (5.1) com  $N = 30$  para comparação.



**Figura 5.2 – Curva Modelo (verde) x Curva Obtida via Interpolação (azul)**

A Figura (5.3) plota a função diferença entre as curvas.



**Figura 5.3 – Diferença entre a curva obtida via Síntese e a Curva Modelo**

Pode-se notar que o menor erro ficou concentrado na faixa do lobo principal, onde as curvas se aproximam bastante. Os erros fora da faixa do lobo principal são decorrentes da degradação do nível de lobo lateral, erros de aproximação e o erro devido ao ajuste do polinômio de Lagrange para que ele seja sempre positivo no intervalo  $[-1;1]$ .

A Tabela (5.2) traz um comparativo de nível de lobo lateral, largura de banda e diretividade entre os dois conjuntos.

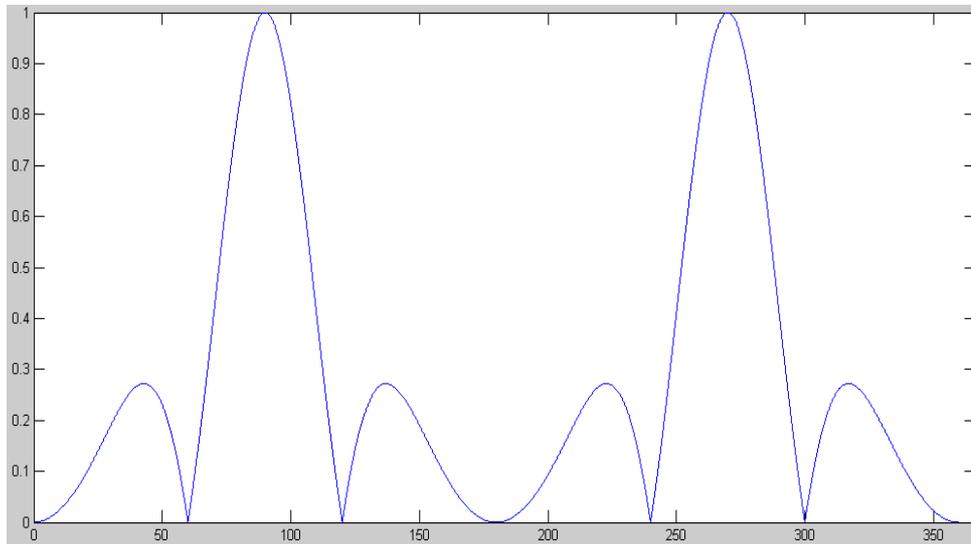
**Tabela 5.2 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese**

	Conjunto Inicial	Conjunto sintetizado
$BW_{3dB}$	1,7°	1,9°
NLL	13,5dB	9,9dB
Diretividade	30	14,7

É possível notar que a diretividade é bem inferior à obtida no conjunto original. No gráfico de irradiação de campo do conjunto sintetizado, mostrado na Figura (5.2), isso já era observado, pois é a quantidade de energia irradiada fora da sua direção de máximo é maior quando comparado à curva modelo.

#### 5.1.1.2. Diagrama Vertical

Como mencionado no início do capítulo, para a síntese do conjunto que atenderá as especificações de irradiação no plano vertical será utilizada como curva desejada aquela dada pela Equação (5.1) para  $N = 4$ , pois esta curva atende as especificações de largura de banda no plano vertical. A forma desta curva é mostrada na Figura (5.4).



**Figura 5.4 – Curva da Equação (5.1) para  $N = 4$**

O primeiro passo é criar uma tabela com a relação de amostras que serão utilizadas para a aplicação do método da interpolação polinomial. Para este caso a interpolação será feita com um polinômio de grau 3, pois, para fins práticos, apresentou erro médio quadrático igual a 0, quando comparado com a curva que foi interpolada.

**Tabela 5.3 – Valores da Função amostra  $G(x_i)$**

$i$	$x_i$	$y_i$	$u_i$	$\theta_i$	$G(x_i) = P(\theta_i)$
0	0,9239	1,8478	0,3927	1,4455	0,8209
1	0,3827	0,7654	1,1781	1,1864	0,1011
2	-0,3827	-0,7654	1,9635	0,8957	0,0452
3	-0,9239	-1,8478	2,7489	0,5054	0,0325

Novamente é aplicada a interpolação polinomial de Lagrange e o polinômio interpolador obtido é o mostrado na Equação (5.7).

$$L(x) = 0,5002x^3 + 0,4999x^2 - 0,00028x + 0,00000004 \quad (5.7)$$

e então se faz a substituição de variáveis  $x$  por  $y/2$  para se obter  $P(y)$ , cuja forma normalizada pode ser vista na Equação (5.8).

$$P(y) = y^3 + 1,9990y^2 - 0,00223y + 0,00000062 \quad (5.8)$$

Que pode ser reescrita como:

$$P(y) = (y + 2,0001)(y - 0,00055)^2 \quad (5.9)$$

Por fim é calculado o campo elétrico  $E(z)$ .

1)  $P(y) = (y + 2,0001)$

$c_1 = 2,0001 \therefore c'_1 = 1,0101$ , que implica em:

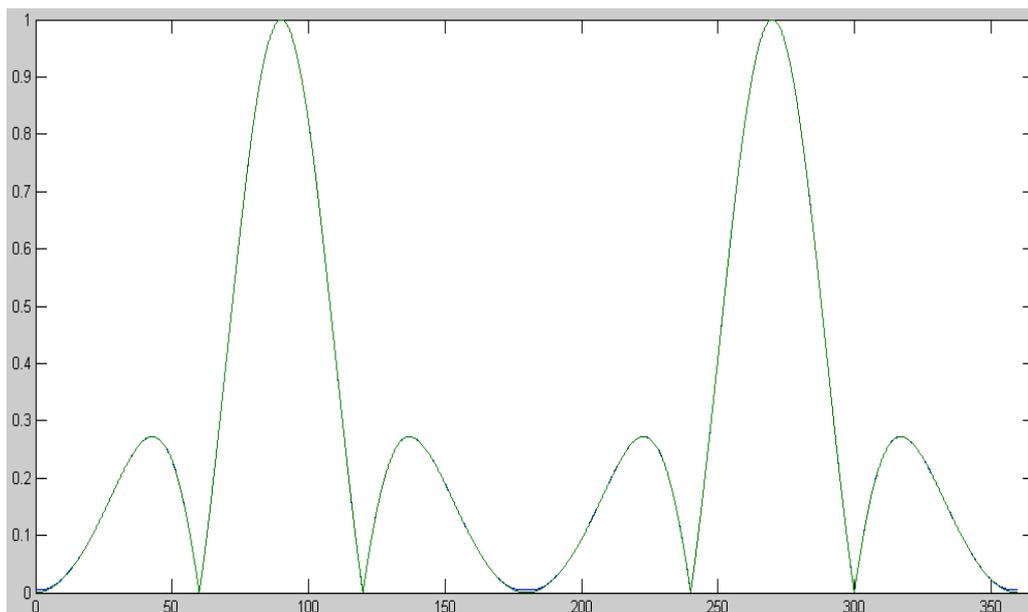
$$E(z) = 0,9950 + 1,0050z^{-1}$$

2)  $P(y) = (y - 0,00055)^2$

$$E(z) = 1 - 0,00055z^{-1} + z^{-2}$$

O campo elétrico  $E(z)$  final é o produto de cada campo elétrico calculado anteriormente. Ou seja:

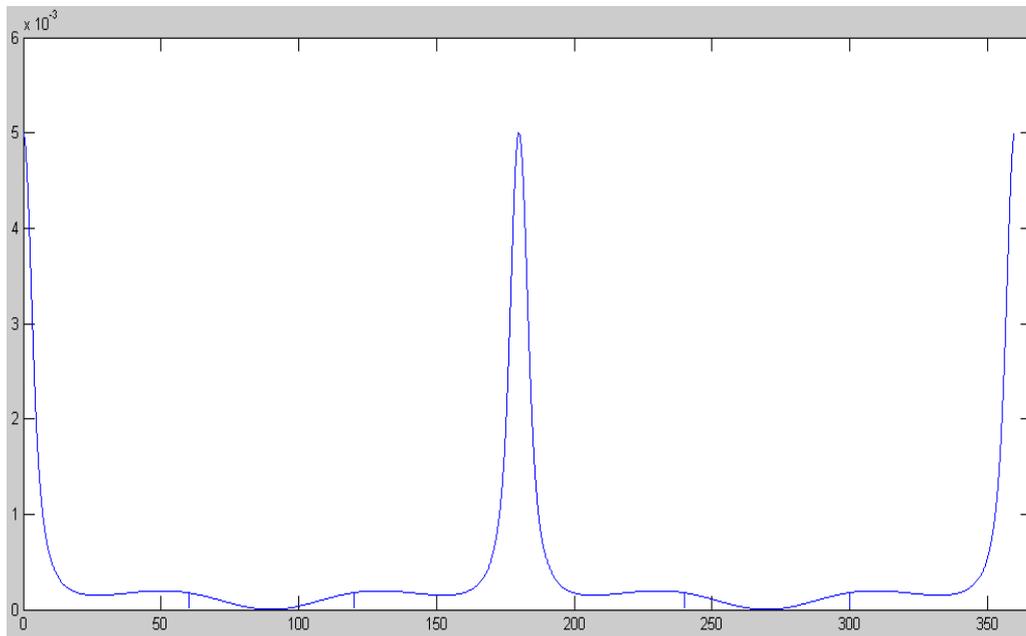
$$E(z) = 0,9950z^{-3} + 1,0045z^{-2} + 0,9945z^{-1} + 1,0050 \quad (5.10)$$



**Figura 5.5 – Curva Modelo (verde) x Curva Obtida via Interpolação (azul)**

É possível notar que esta curva da Figura (5.5) ficou bem mais próxima da curva que foi interpolada, quando comparada com o resultado obtido para o plano horizontal. Este fato leva a seguinte conclusão: o método da interpolação polinomial é mais preciso quando se usa um número menor de elementos. Isso é esperado, pois quanto maior a ordem do polinômio de Lagrange mais significativos são os erros de cálculo.

A Figura (5.6) plota a função erro, ou seja, a diferença entre o diagrama de irradiação interpolado e o diagrama de irradiação gerado pelo conjunto obtido. É possível observar que o erro máximo ficou na ordem  $10^{-3}$ .



**Figura 5.6 – Diferença entre a curva obtida via Síntese e a Curva Modelo**

A Tabela (5.4) traz um comparativo de nível de lobo lateral, largura de banda e diretividade entre os dois conjuntos.

**Tabela 5.4 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese**

	Conjunto Inicial	Conjunto sintetizado
$BW_{3dB}$	13,2°	13,2°
NLL	11,4dB	11,4dB
Diretividade	4	4,0

### 5.1.1.3. Campo Resultante no Espaço.

Como explicado na Seção 4.4, o conjunto resultante no espaço possui o número total de elementos igual ao número de elementos do conjunto horizontal (25) vezes o número de elementos do conjunto vertical (4), o que, neste caso significa 100 irradiadores posicionados em forma de grade no plano  $xy$ .

Também da Seção 4.4, a corrente de alimentação destes elementos segue a seguinte relação:

$$I_{mn} = I_{m0} I_{0n} \quad (5.11)$$

da Equação (4.41), substituindo o fator de elemento,  $f(\varphi, \theta)$ , por 1 (devido ao uso de irradiadores isotrópicos), obtém-se que o campo no espaço  $E(\theta, \varphi)$  é escrito da seguinte forma:

$$E(\theta, \varphi) = S_x S_y \quad (5.12)$$

onde  $S_x$  é o fator de conjunto horizontal e  $S_y$  é o fator de conjunto vertical.

Mais uma vez da Seção (4.4), são tiradas as seguintes relações:

- Horizontal:  $S_x = E(z)$ , com  $z = e^{jmu}$  e  $u = kd_x \text{sen}(\theta) \cos(\varphi) + \alpha_x$ , com  $m$  inteiro variando no intervalo  $[0 M-1]$ .
- Vertical:  $S_y = E(z)$ , com  $z = e^{jnv}$  e  $v = kd_y \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi) + \alpha_y$ , com  $n$  inteiro variando no intervalo  $[0 N-1]$ .

onde  $\alpha_x = -kd_x \text{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0)$  e  $\alpha_y = -kd_y \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\varphi_0)$ .

No presente caso será considerada a direção de máxima irradiação em cima do eixo  $y$ , ou seja,  $\theta_0 = \varphi_0 = 90^\circ$ , o que implica em  $\alpha_x = 0$  e  $\alpha_y = -\pi$ .

O diagrama de irradiação de potência no espaço pode ser observado na Figura (5.7)

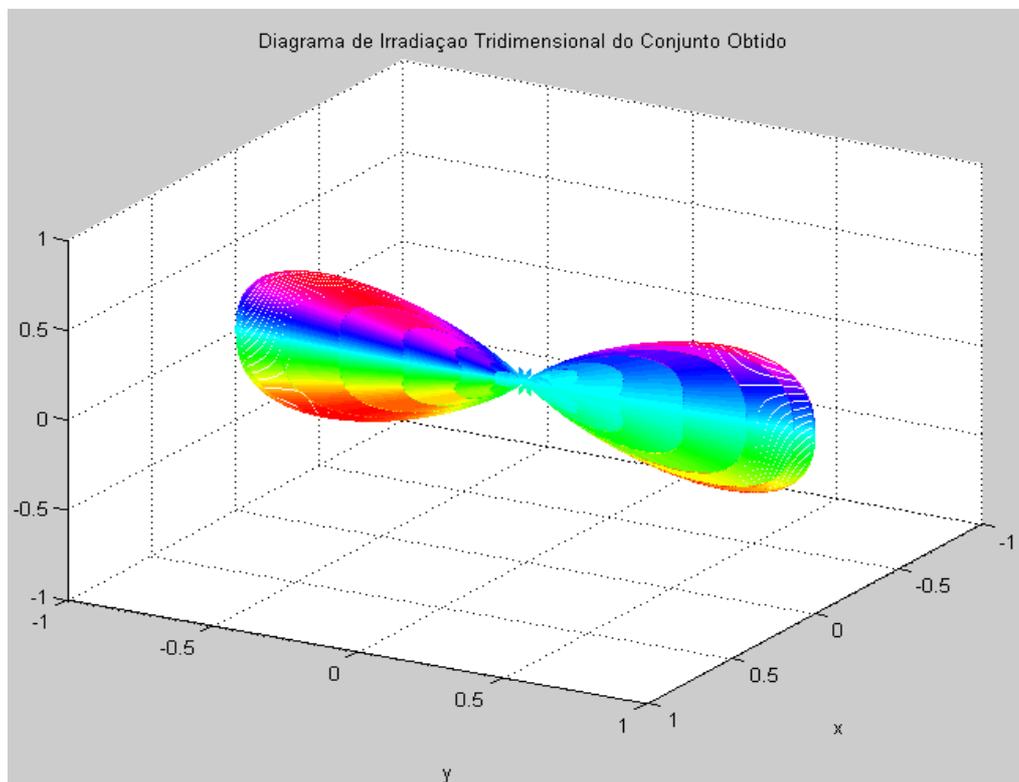
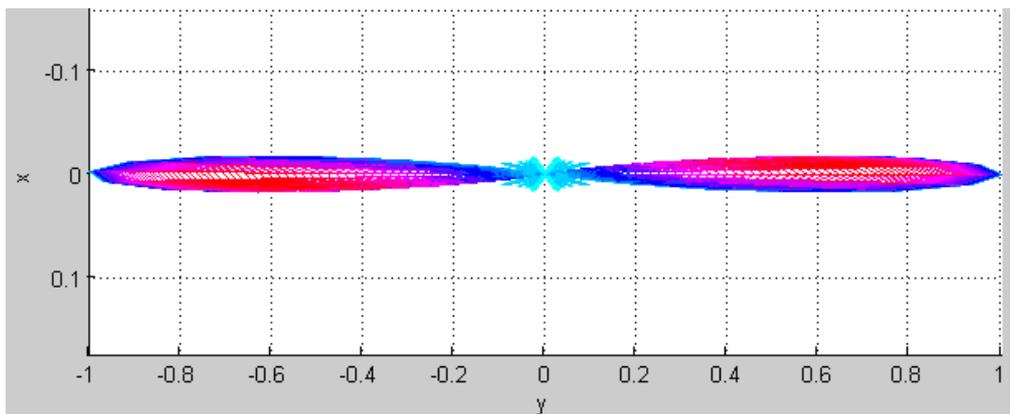


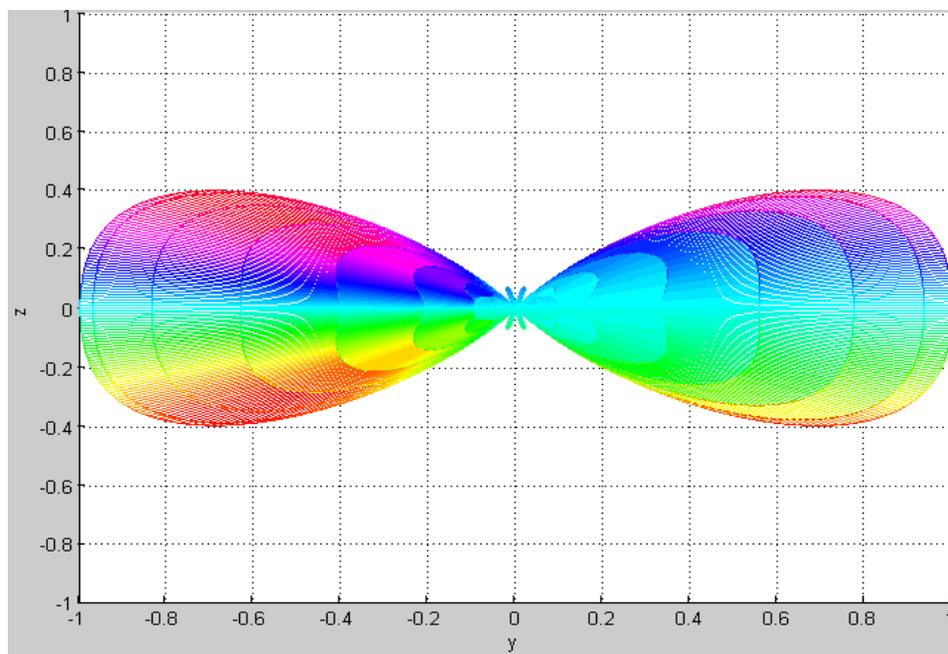
Figura 5.7 – Diagrama de Irradiação de Potência no Espaço

É possível perceber claramente a direção de máxima irradiação ao longo do eixo  $y$ , assim como as aberturas do diagrama de irradiação são maiores no plano vertical (plano  $yz$ ) em relação às aberturas no plano horizontal (plano  $xy$ ), o que era o esperado dadas as especificações da antena.

As Figuras (5.8) e (5.9) ilustram, respectivamente, as projeções no plano horizontal e vertical do diagrama de irradiação da Figura (5.7) e mostram que os resultados no espaço tridimensional se apresentam de acordo com o que foi obtido e analisado no plano bidimensional.



**Figura 5.8 – Projeção no plano  $xy$  do Diagrama de Potência**



**Figura 5.9 – Projeção no plano  $yz$  do Diagrama de Potência**

O próximo passo é obter uma antena, utilizando o método de processamento de sinais, a partir das mesmas especificações, o que será feito na próxima seção.

## 5.1.2. Método da Função de Abertura Linear

### 5.1.2.1. Diagrama Horizontal

O primeiro passo para a utilização do método é encontrar valores de  $S$  e  $R$ , de forma que ao serem aplicados na Equação (4.36) seja gerado  $E_{\text{eff}}(x)$  cujo diagrama atende as especificações da antena que se deseja obter.

Como neste caso a especificação é a largura de banda, se vai buscar o menor valor de  $S$  com  $R = 2$  que atenda a especificação, pois como visto no Capítulo 4, a redução da largura de banda de meia potência está associada ao aumento de  $S$ .

Através de algumas simulações no MATLAB foi possível descobrir que o menor valor de  $S$  que atendeu as especificações, ou seja, cujo  $E_{\text{eff}}$  apresentou o menor erro médio quadrático em relação à curva modelo (dada pela Equação (5.1) para  $N = 30$ ) no lobo principal de irradiação e a menor quantidade de energia irradiada fora deste lobo principal, é  $S = 32$  (lembrando que  $S$  deve ser inteiro e potência de 2 [11]), dessa forma:

$$E_{\text{eff}}(x) = E_1(x)E_2(x) = \left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{31} x^i \right) \quad (5.13)$$

E o diagrama de irradiação de campo representado por  $E_{\text{eff}}(x)$ , em função de  $\theta$  pode ser observado na Figura (5.10).

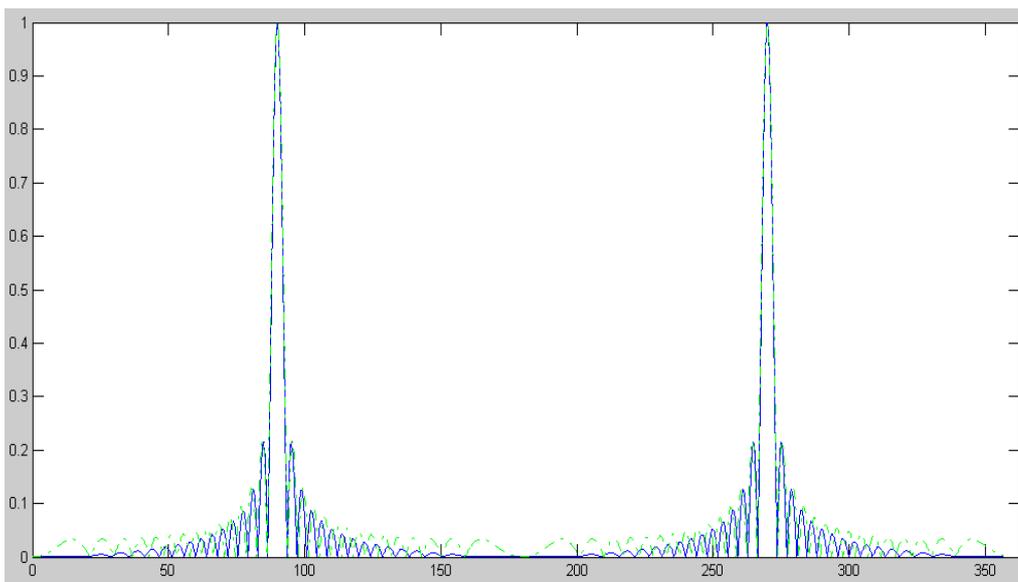


Figura 5.10 – Curva de  $E_{\text{eff}}(x)$  (em azul) e curva modelo (em verde)

A Tabela (5.5) traz um comparativo de nível de lobo lateral, largura de banda e diretividade entre os dois conjuntos.

**Tabela 5.5 – Tabela Comparativa do Conjunto Inicial e da Irradiação Efetiva da Solução via Síntese**

	Conjunto Inicial	Conjunto sintetizado
BW <sub>3dB</sub>	1,7°	1,6°
NLL	13,5dB	13,6dB
Diretividade	30	32,5

Neste caso tem-se:

$$E_1(x) = 0,5(1+x)$$

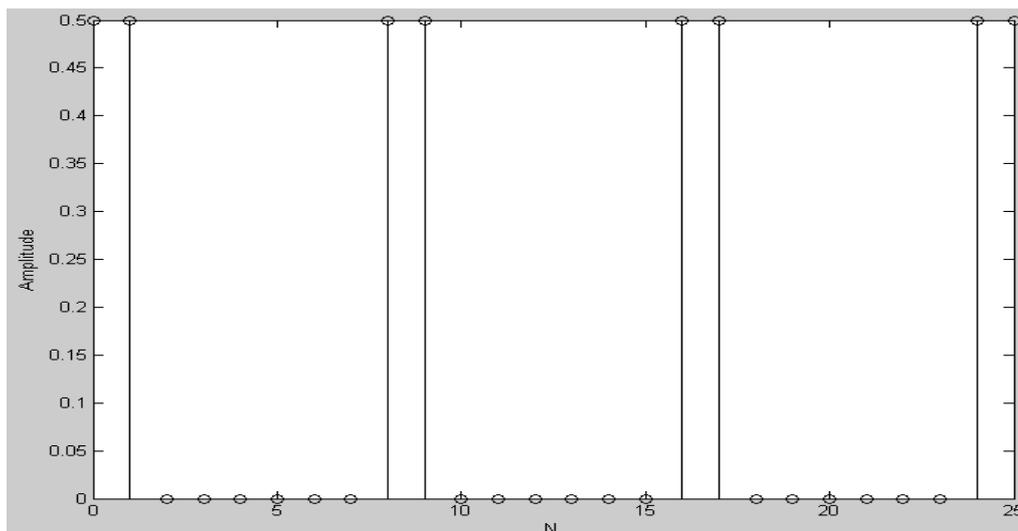
$$E_2(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$$

Uma escolha possível para  $E_T(x)$  e  $E_R(x)$  é a seguinte:

$$\begin{aligned} E_T(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \\ &= x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned} \quad (5.14)$$

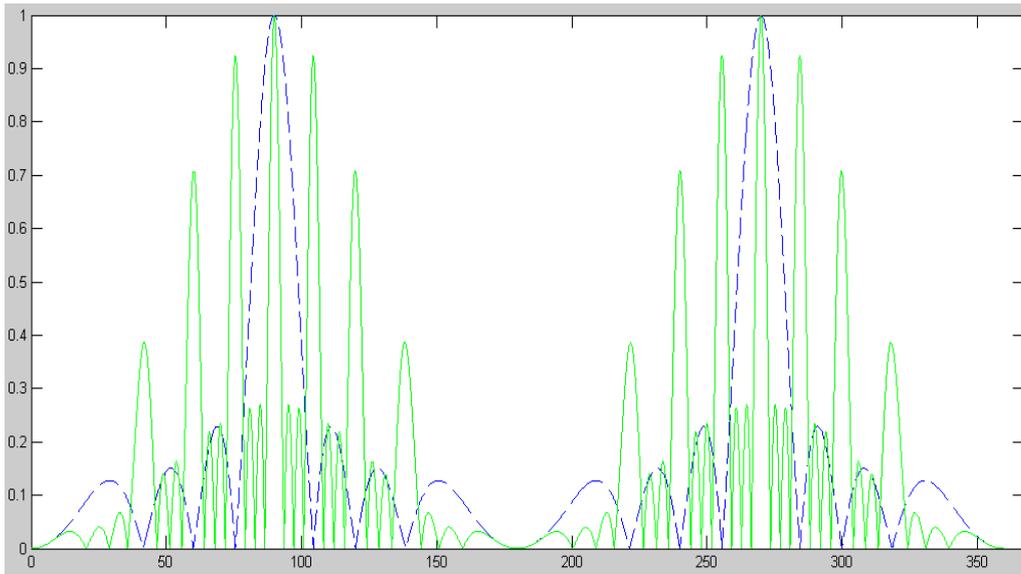
$$\begin{aligned} E_R(x) &= 0,5(1+x)(1+x^8)(1+x^{16}) \\ &= 0,5(x^{25} + x^{24} + x^{17} + x^{16} + x^9 + x^8 + x + 1) \end{aligned} \quad (5.15)$$

A Figura (5.11) expressa como seria a distribuição de corrente dos elementos de  $E_R(x)$ .



**Figura 5.11 – Distribuição de Corrente por cada Elemento de Antena.**

Os diagramas de irradiação de  $E_T(x)$  e  $E_R(x)$  são mostrados na Figura (5.12).



**Figura 5.12 –  $E_T(x)$  (curva azul) e  $E_R(x)$  (curva verde)**

O diagrama de irradiação da antena de recepção  $E_R(x)$  possui vários máximos de amplitude muito próximos a do lobo principal que se alinham com os nulos do diagrama de irradiação da antena de transmissão  $E_T(x)$ , de forma que quando combinados o diagrama de irradiação efetivo  $E_{\text{eff}}(x)$  fica como o da Figura (5.10).

A antena de transmissão possui 8 elementos não-nulos, assim como a de recepção, fazendo com o que o conjunto resultante tenha 16 elementos. O conjunto obtido para a antena de recepção é o que se chama de conjunto espaçado. Esta antena é, na verdade, um conjunto de 26 elementos, onde os elementos 1, 2, 9, 10, 17, 18, 25 e 26 são alimentados com corrente igual a 0,5 e os outros elementos com corrente nula, ou seja, não existem, como mostrado na Figura (5.11).

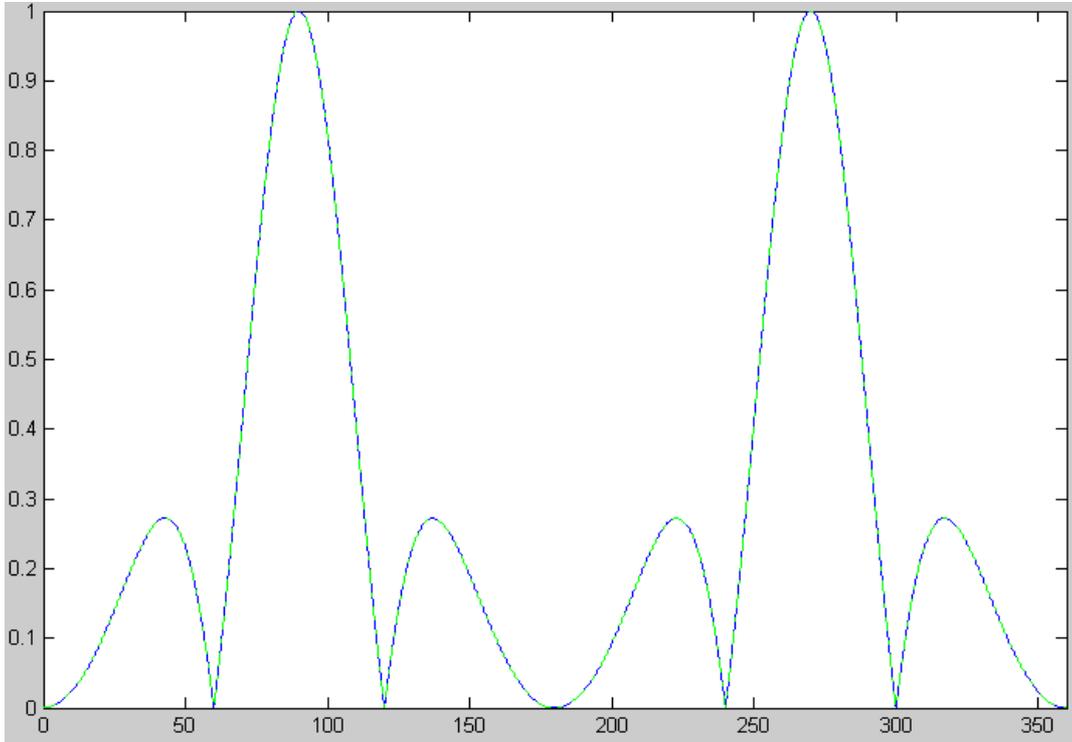
#### 5.1.2.2. Diagrama Vertical

Para o caso vertical, os menores valores de  $S$  e  $R$  que atendiam as especificações dadas, utilizando o mesmo critério das seções anteriores, foram 4 e 1 respectivamente. Com tais condições tem-se:

$$E_1(x) = 1 \quad (5.16)$$

$$E_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad (5.17)$$

Neste caso, dada a simplicidade da antena,  $E_T(x)$  e  $E_R(x)$  serão escolhidos como sendo  $E_2(x)$  e  $E_1(x)$  respectivamente. A Figura (5.13) mostra a comparação entre a curva do diagrama de irradiação do conjunto  $E_T(x)$  e a curva modelo. Elas são iguais para fins práticos.



**Figura 5.13 – Curva de  $E_{eff}(x)$  (em azul) e curva modelo (em verde)**

No conjunto vertical a solução final não foi um conjunto espaçado, mas um conjunto regular (com nenhum de seus elementos nulos), isso se deu, pois o número de elementos do conjunto vertical é pequeno.

### 5.1.2.3. Campo Resultante no Espaço.

Para o método da Função de Abertura Linear, aplicando o método da separação de variáveis, as seguintes relações são válidas:

$$E_{eff}(x, y) = E_{Heff}(x)E_{Veff}(y) \quad (5.18)$$

$$E_T(x, y) = E_{HT}(x)E_{VT}(y) \quad (5.19)$$

$$E_R(x, y) = E_{HR}(x)E_{VR}(y) \quad (5.20)$$

Onde  $E_H(x)$  representa campos elétricos no plano horizontal e  $E_V(y)$  representa campos elétricos no plano vertical.

As relações entre  $x$ ,  $y$  e  $\theta$  são muito similares a descrita para o método da interpolação polinomial, de forma que:

$$x = e^{mj_u} \text{ e } u = kd_x \text{sen}(\theta) \cos(\varphi) + \alpha_x \quad (5.21)$$

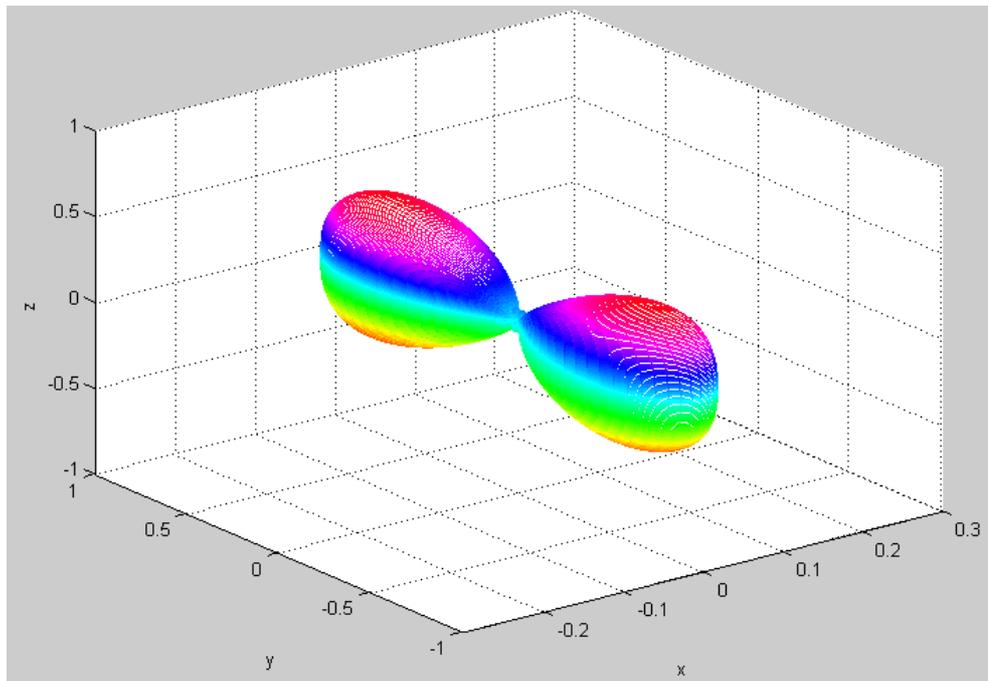
$$y = e^{nj_v} \text{ e } v = kd_y \text{sen}(\theta) \cos(\varphi) + \alpha_y \quad (5.22)$$

onde  $\alpha_x = -kd_x \text{sen}(\theta_0) \cos(\varphi_0)$  e  $\alpha_y = -kd_y \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\varphi_0)$ .

Como no caso anterior, a direção de máxima irradiação será em cima do eixo  $y$ , ou seja,  $\theta_0 = \varphi_0 = 90^\circ$ , o que implica em  $\alpha_x = 0$  e  $\alpha_y = -n\pi$ .

Como não houve elementos nulos na antena de transmissão (todos os elementos nulos ficaram na antena de recepção), ela será um conjunto regular, em outras palavras uma grade com 32 irradiadores isotrópicos (8x4).

O diagrama de irradiação de potência normalizado no espaço da antena de transmissão,  $E_T(x,y)$  pode ser visto na Figura (5.14).



**Figura 5.14 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Transmissão**

As Figuras (5.15) e (5.16) ilustram, respectivamente, as projeções no plano horizontal e vertical do diagrama de irradiação de potência de  $E_T(x,y)$ .

A antena de transmissão possui a forma muito parecida com a forma de irradiação desejada (antena efetiva). Apenas a abertura do feixe no plano horizontal é maior que a desejada, pois este “problema” será corrigido na antena de recepção.

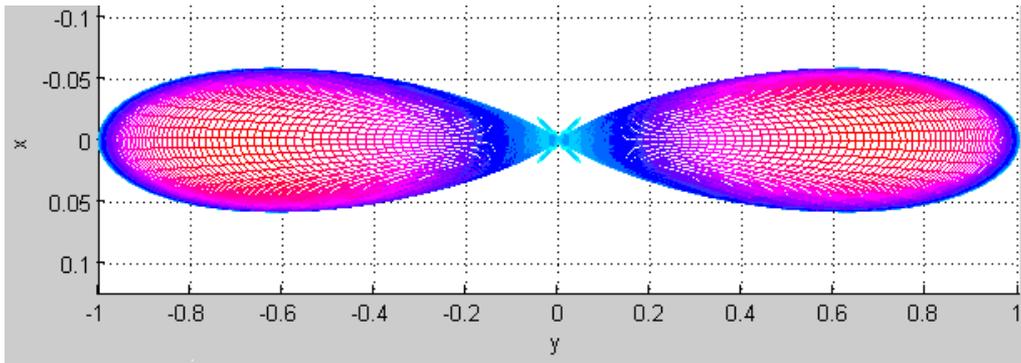


Figura 5.15 – Projeção Horizontal (plano  $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_T(x,y)$

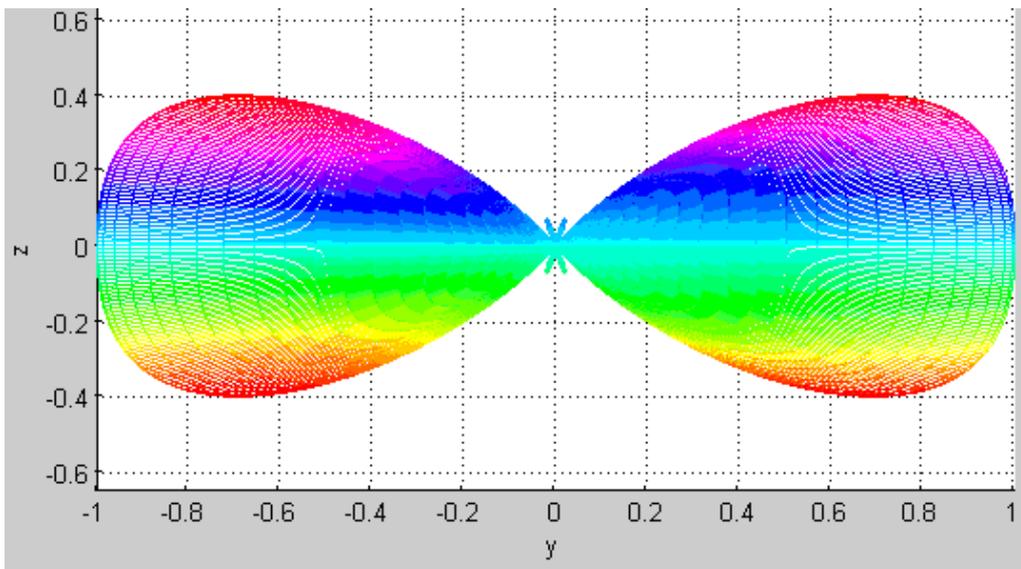


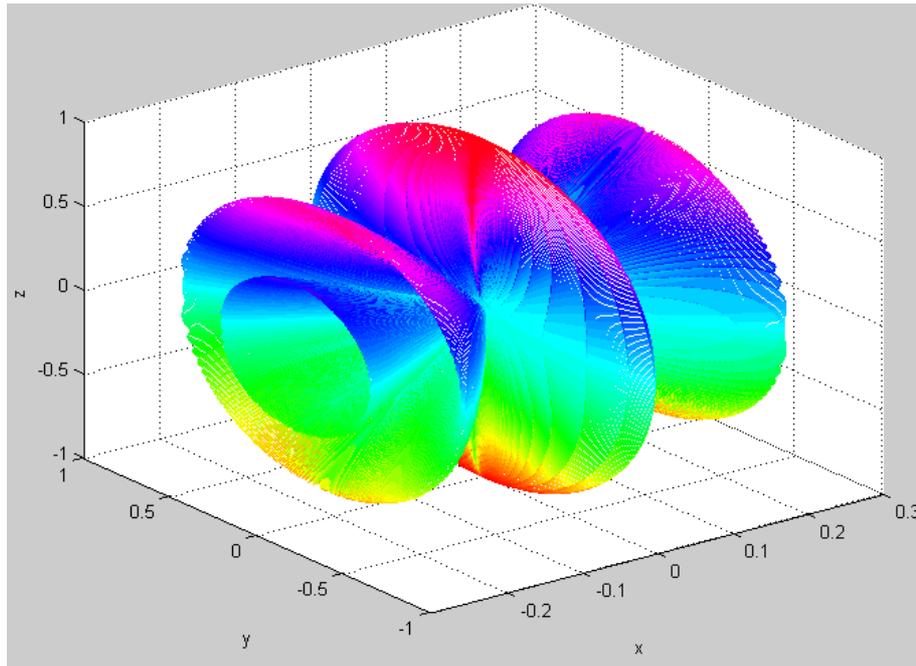
Figura 5.16 – Projeção Vertical (plano  $yz$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_T(x,y)$

A antena de recepção, diferente da de transmissão, é formada por um conjunto espaçado.

Como foi visto nas Seções 5.1.2.1 e 5.1.2.2, a antena possui elementos apenas ao longo do eixo horizontal, pois a antena de transmissão já conseguia gerar o diagrama de irradiação desejado no plano vertical.

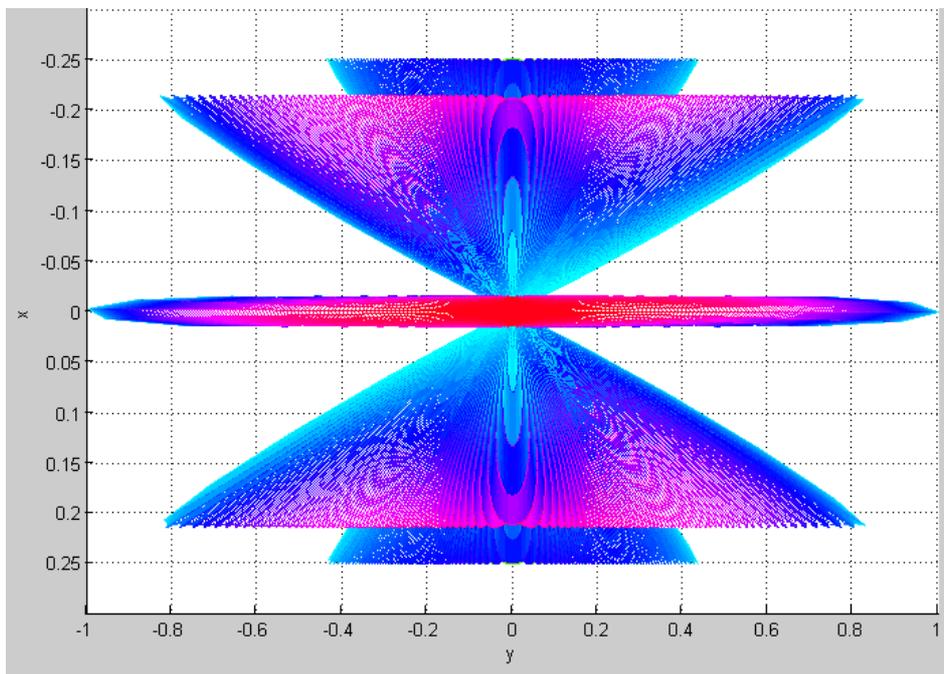
Neste caso, a antena de recepção será um *array* com 8 elementos ao longo do eixo  $x$ .

O diagrama de irradiação de potência normalizado da antena de recepção é mostrado na Figura (5.17).



**Figura 5.17 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Recepção**

As Figuras (5.18) e (5.19) ilustram, respectivamente, as projeções no plano horizontal e vertical do diagrama de irradiação de potência de  $E_R(x,y)$ .

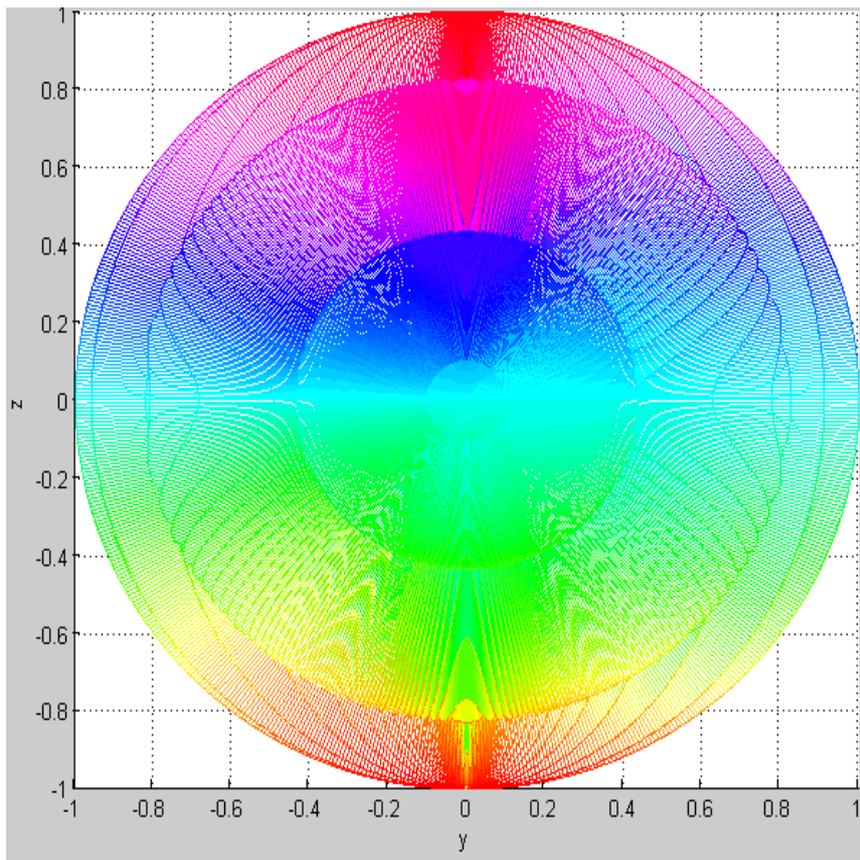


**Figura 5.18 – Projeção Horizontal (plano  $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_R(x,y)$**

É possível notar na projeção horizontal do diagrama de irradiação da Figura (5.18) que a antena de recepção possui um lobo principal muito estreito, ou seja, com largura de banda de meia potência pequena, este lobo principal estreito permite que a antena de transmissão possua um lobo não tão estreito, já

que a antena de recepção captará a resposta em uma pequena faixa angular, cancelando os sinais recebidos das faixas angulares indesejáveis.

Outro ponto a ser destacado é que os lobos secundários da antena de recepção são quase da mesma amplitude do lobo principal. Isso só é possível, pois estes lobos secundários caem em faixas angulares onde a antena de transmissão irradia uma potência muito baixa, praticamente nula pra fins práticos, sendo anulada quando se pensa no diagrama de irradiação combinado.

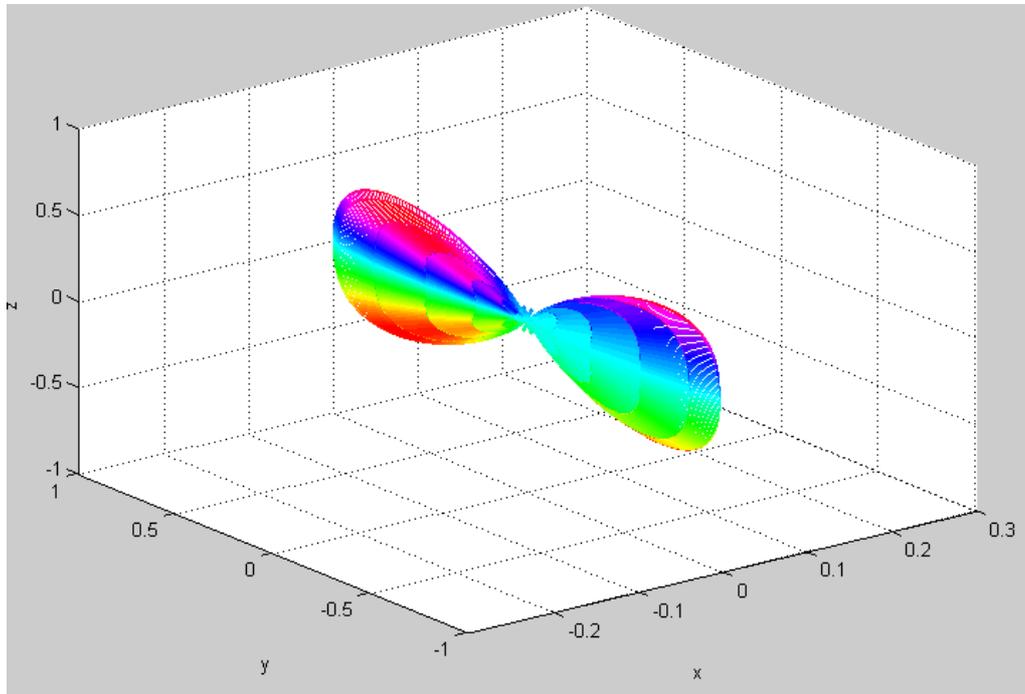


**Figura 5.19 – Projecção Vertical (plano yz) do Diagrama de Irradiação de  $E_R(x,y)$**

Como esperado o diagrama vertical da antena de recepção, mostrado na Figura (5.19), é o de uma antena omnidirecional já que ela é formada por um *array* de elementos ao longo do eixo *x*, influenciando apenas no campo elétrico horizontal da antena.

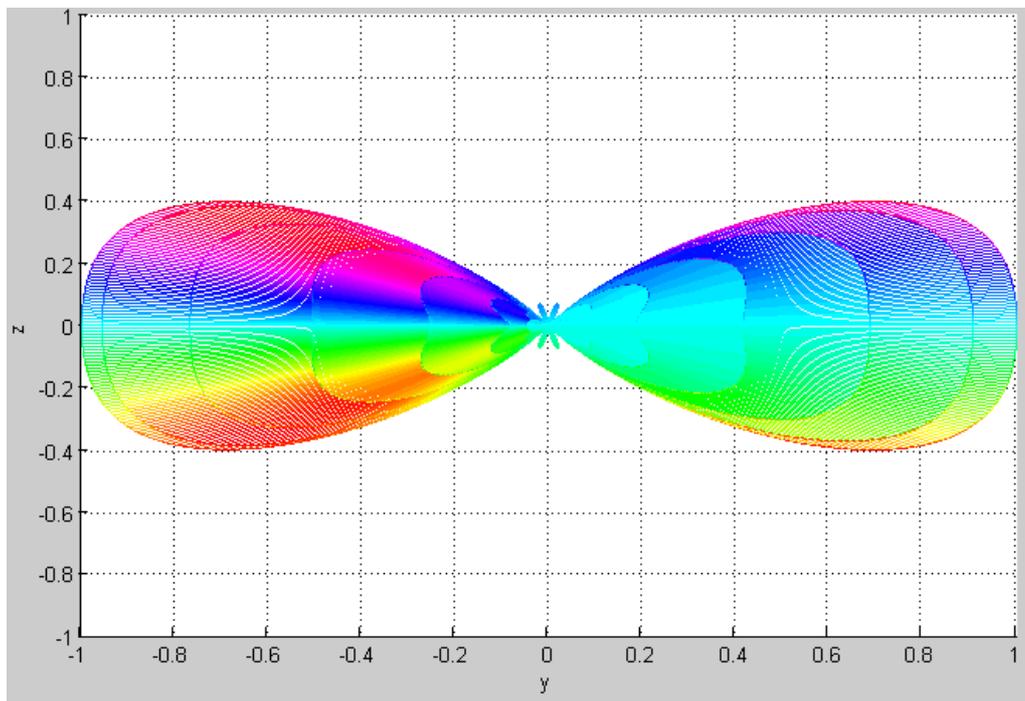
Alguns problemas podem ser causados com este tipo de arranjo, caso haja um descasamento entre as direções de máxima irradiação das antenas de recepção e transmissão, ou seja, caso estes máximos de irradiação não estejam alinhados, mas isso será discutido mais a frente.

Por fim é gerado o diagrama espacial de radiação de potência resultante da solução (combinando o diagrama de irradiação da antena de transmissão com a de recepção), que pode ser visto na Figura (5.20).

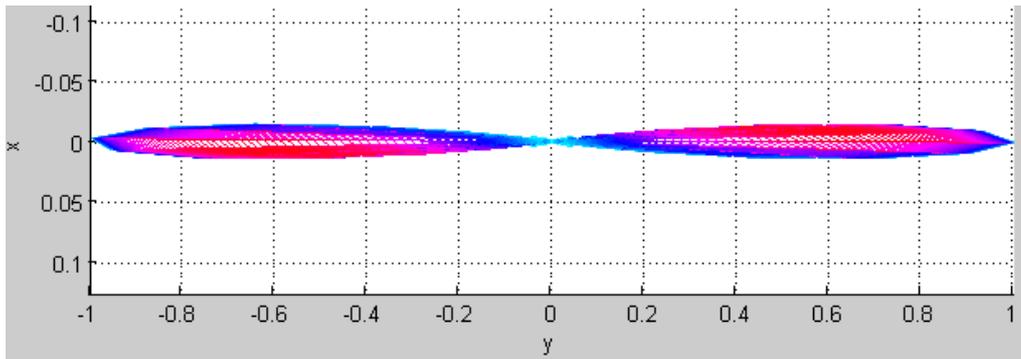


**Figura 5.20 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante (Combinado)**

As projeções vertical e horizontal do diagrama da Figura (5.20) são vistas nas Figuras (5.21) e (5.22) respectivamente.



**Figura 5.21 – Projeção Vertical (plano yz) do Diagrama de Irradiação de  $E_{\text{eff}}(x,y)$**



**Figura 5.22 – Projeção Horizontal (plano  $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_{\text{eff}}(x,y)$**

O total de elementos utilizado nesta solução foi 40, 32 na antena de transmissão e 8 na antena de recepção.

### **5.1.3. Comparação entre os Métodos**

Nesta Seção será feita uma análise comparativa entre os métodos da interpolação polinomial e da função abertura linear.

Analisando as Tabelas (5.2) e (5.5) é possível notar que a maior diferença entre os resultados obtidos foi a diretividade dos conjuntos no plano horizontal. A solução (conjunto de transmissão + conjunto de recepção) obtida via função abertura linear é mais diretiva quando comparada à solução via interpolação polinomial, o que quer dizer que a mesma é mais eficiente em termos de potência, pois a solução final obtida via função abertura linear dá ganho maior no processo de transmissão/recepção do sinal.

A comparação de acordo com outros critérios específicos, como a complexidade de construção, será feita a seguir.

#### **Complexidade de Construção**

No que diz respeito à complexidade de construção, a solução obtida via interpolação polinomial possui uma complexidade de construção bem maior que a obtida através do método função abertura linear.

Em primeiro lugar, o número de elementos a ser utilizado é maior no conjunto obtido via interpolação polinomial, 100 contra 40 da solução obtida através do outro método (32 do conjunto de transmissão mais 8 do conjunto utilizado para a recepção). Outro ponto que torna a construção do primeiro

conjunto muito complexa é o fato de não haver relação constante entre os módulos das correntes de alimentação dos elementos, sendo as mesmas totalmente independentes uma das outras.

Alimentar cada elemento com uma corrente diferente torna o sistema mais caro, mais complexo e mais suscetível a erros. São necessárias diversas fontes de alimentação ou um circuito de entrada muito complexo para que cada elemento seja alimentado com a corrente correta. Além disso, qualquer dos dois arranjos é de complexa manutenção.

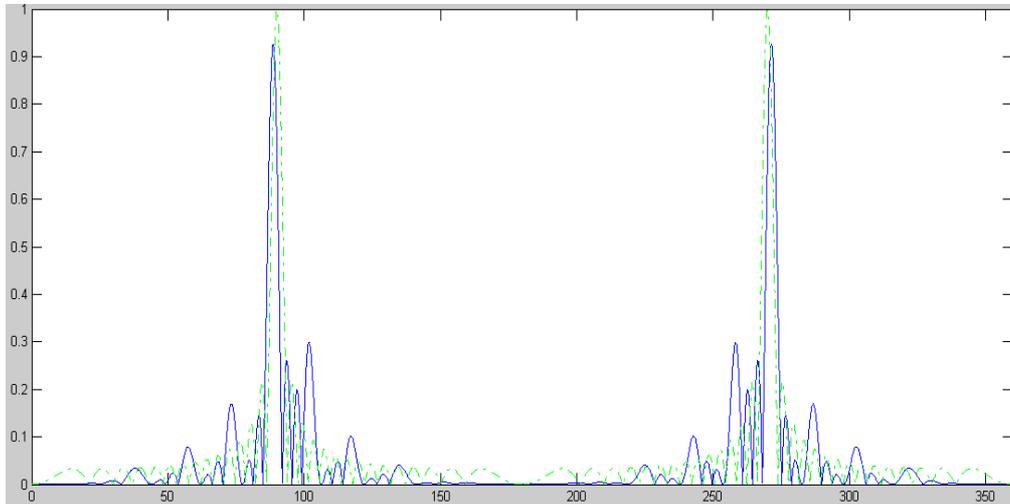
Dessa forma, se pode concluir que, no que diz respeito à complexidade de construção, o conjunto obtido através do método função abertura linear leva vantagem.

### **Descasamento entre Máximos das Antenas de Transmissão e Recepção**

No que diz respeito aos efeitos causados pelo “descasamento” entre os máximos das antenas de transmissão e recepção, pode-se dizer que este tipo de problema afeta menos as antenas obtidas via método da interpolação polinomial, pois o método tem como premissa a construção de um conjunto que atenda às especificações dadas, podendo a antena da outra ponta ser omnidirecional por exemplo. Por este motivo se pode considerar que os efeitos deste problema na solução definida através do método da interpolação polinomial são irrelevantes. Já a solução obtida através do método função abertura linear é mais sensível a este tipo de problema, pois em sua construção é feito uso da relação entre as antenas de transmissão e recepção visando simplificar a solução final, como visto na Figura (5.12), por exemplo, lobos laterais indesejados na antena de transmissão coincidem com nulos da antena de recepção, a medida que a distância entre estes pontos (máximos secundários e nulos) aumenta, o nível de lobo lateral do diagrama de irradiação efetivo aumenta também, podendo chegar a limites não toleráveis.

Como visto, a solução obtida através do método função abertura linear combina adequadamente regiões de alta e baixa potência das antenas de transmissão e recepção para obter o diagrama efetivo desejado, com nulos (ou região de baixa potência) de um diagrama cancelando máximos (ou regiões de alta potência) indesejáveis do outro. Caso estas regiões não se combinem

adequadamente o diagrama de irradiação efetivo não será como o desejado. A Figura (5.23) mostra o efeito causado por um defasamento indesejado de cerca de  $3^\circ$  entre as posições dos máximos de irradiação das antenas de transmissão e recepção no diagrama de irradiação de campo elétrico efetivo  $E_{\text{eff}}(x)$ .



**Figura 5.23 – Curva de  $E_{\text{eff}}(x)$  (em azul) e curva modelo (em verde)**

Como primeira observação pode ser notada que a direção de máxima irradiação não é mais  $90^\circ$ , sendo deslocada para  $88,6^\circ$ .

A Tabela (5.6) traz um comparativo entre as características do diagrama de irradiação com os máximos de irradiação casados (conjunto ideal), e com a defasagem de  $3^\circ$  entre os máximos do conjunto de transmissão e recepção (conjunto em análise).

**Tabela 5.6 – Tabela comparativa do conjunto inicial e do obtido com a síntese**

	Conjunto em Análise	Conjunto Ideal
$BW_{3\text{dB}}$	$1,6^\circ$	$1,6^\circ$
NLL	9,8dB	13,6dB
Diretividade	29	32,5

Pode-se notar, através dos dados apresentados na Tabela (5.6), que o efeito causado foi a degradação da solução quando não há o casamento ideal entre a localização dos máximos de irradiação. O conjunto descasado possui menor diretividade e menor atenuação em seus lobos laterais, a única característica mantida é a largura de banda de meia potência.

A tendência é que quanto mais afastados, em termos de posição angular no plano horizontal, mais degradadas ficam as características do conjunto (antena de transmissão + antena de recepção) em relação ao caso ideal. Na prática, haverá um limite tolerável para este afastamento e tal limite dependerá da aplicação da antena. No presente exemplo o nível de lobo lateral foi o índice mais afetado o que sugere que aplicações mais sensíveis a este fator serão menos toleráveis ao descasamento.

Este tipo de problema pode ser minimizado com a inclusão de um circuito controlador no sistema de recepção do sinal [19]. Este circuito ajustaria dinamicamente a defasagem de corrente entre os elementos de antena do conjunto de recepção de forma a (re)encontrar a direção de máxima irradiação da potência de transmissão. O reajuste poderia ser feito a cada período de tempo definido ou sempre que houvesse queda significativa no nível de potência recebida. Basicamente, seria feita uma varredura com  $\alpha$  variando de  $-\alpha_0$  a  $\alpha_0$  e a potência recebida seria armazenada para cada valor de  $\alpha$ , ao fim da varredura, verificar-se-ia o valor de defasagem de corrente que resultou na máxima potência recebida.

### **Interferências Causadas em Sistemas Adjacentes**

No que diz respeito aos problemas causados por interferências em sistemas adjacentes, mais uma vez a solução obtida via interpolação polinomial se mostra mais robusta. Ao serem comparados os diagramas de irradiação horizontal do conjunto obtido via interpolação polinomial, Figura (5.2), e o diagrama de irradiação horizontal da antena de transmissão da solução obtida via método função abertura linear, Figura (5.12), é possível perceber que mais energia é irradiada fora da região do lobo principal do diagrama da antena (isto é, a região de interesse) no segundo. Como explicado anteriormente, isso será compensado na antena de recepção não causando problema para o sistema do qual este conjunto faz parte, porém ao irradiar mais potência fora de sua região de interesse aumenta-se o nível de ruído para todos os outros sistemas adjacentes já que o sinal de um sistema é considerado ruído nestes sistemas adjacentes. O aumento da potência do ruído implica na degradação da relação sinal-ruído, que dependendo do seu nível pode gerar interferências.

## **Interferências Sofridas por Captação de Sinal de Sistemas Adjacentes**

No que diz respeito aos problemas causados por interferências sofridas devido à captação de sinais de sistemas adjacentes, o método da função abertura linear se mostra mais robusto. Isso se dá porque, como já explicado, o método da interpolação polinomial não leva em consideração a antena de recepção na hora de montar a solução, apenas a de transmissão. Caso haja algum requisito específico da antena de recepção, o método terá que ser aplicado duas vezes (uma para a antena de recepção e uma para a antena de transmissão), duplicando o esforço e como a construção das antenas será independente, não se levará em consideração a interação entre elas visando simplificar a solução final (como faz o método da função abertura linear).

Por sua vez, o método da função abertura linear já leva em consideração a antena de recepção (e sua interação com a antena de transmissão) na obtenção da solução. Caso haja, além dos requisitos de irradiação efetivo (transmissão + recepção), algum requisito específico com relação à antena de recepção (ou de transmissão), como uma largura de banda máxima na antena de recepção (exemplo: no caso da antena utilizada em sistemas de radar a largura de banda efetiva no plano horizontal deve ser da ordem de  $2,5^\circ$ . Poderia haver ainda uma segunda especificação dizendo que a largura de banda da antena de recepção não poderia ultrapassar  $5^\circ$ ) para evitar a captação de ruído vindo de outro sistema, basta que isso seja levado em consideração no momento da escolha de  $E_T(x)$  e  $E_R(x)$  em função de  $E_{eff}(x)$  fatorado.

## **5.2. Antenas para Uso em Satélite**

Antenas utilizadas em satélites são, em geral, antenas altamente diretivas em ambas as direções devido à distância que deve ser alcançada pelo feixe irradiado [14].

Uma antena utilizada para este fim tem largura de banda de meia potência entre  $0,15^\circ$  e  $0,5^\circ$  tanto no feixe horizontal quanto no vertical [14]. Embora não haja uma especificação única acerca do nível de lobo lateral deste tipo de antena (varia de acordo com cada caso), o ideal é que seja sempre o menor possível, pois tais antenas irradiam em alta potência devido à distância do seu

receptor e um alto NLL pode significar uma alta irradiação de potência em direções indesejadas, o que pode causar problema de interferência em outros sistemas de transmissão.

Uma curva que atende esta especificação é dada pela função representada pela Equação (5.1) para  $N = 110$ , isto é,  $f_{110}(u)$ .

Como a metodologia utilizada é a mesma usada na seção anterior, algumas etapas serão mostradas de forma mais sucinta.

## 5.2.1. Método da Interpolação Polinomial

### 5.2.1.1. Diagrama Horizontal

Para a síntese do diagrama horizontal da antena utilizada em sistemas de satélites será utilizado como curva modelo dada pela Equação (5.1) com  $N = 110$ , pois a mesma atende as especificações de largura de meia potência descritas no início da seção. O gráfico desta equação em função de  $\theta$  é dado pela Figura (5.24).

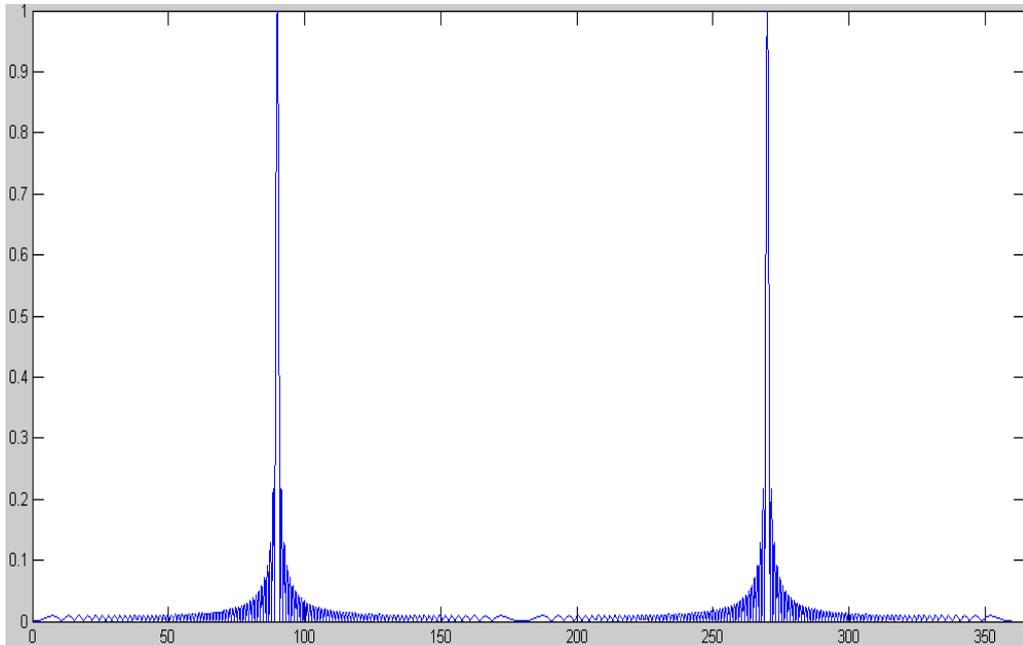


Figura 5.24 – Curva da Equação (5.1) para  $N = 110$

Analogamente à Seção 5.1, com a ajuda do MATLAB foi visto que a solução que tinha o menor erro quadrático na região do lobo principal e irradiava a menor quantidade de energia fora desta região, era obtida ao

interpolando a função  $f_{110}(u)$  por um polinômio de Lagrange de grau 89. A Tabela (5.7) traz as amostras de  $f_{110}(u)$  que serão utilizadas na aplicação do método da Interpolação Polinomial.

Tabela 5.7 – Valores da Função amostra  $G(x_i)$

$i$	$x_i$	$y_i$	$u_i$	$\theta_i$	$G(x_i) = P(\theta_i)$
0	0,99985	1,99970	0,01745	1,56524	0,7247079647
1	0,99863	1,99726	0,05236	1,55413	0,0077539568
2	0,99619	1,99239	0,08727	1,54301	0,0430404499
3	0,99255	1,98509	0,12217	1,53190	0,0040912390
4	0,98769	1,97538	0,15708	1,52078	0,0066469519
5	0,98163	1,96325	0,19199	1,50965	0,0074337935
6	0,97437	1,94874	0,22689	1,49851	0,0000468412
7	0,96593	1,93185	0,26180	1,48737	0,0045173599
8	0,95630	1,91261	0,29671	1,47621	0,0012508859
9	0,94552	1,89104	0,33161	1,46504	0,0009759343
10	0,93358	1,86716	0,36652	1,45386	0,0023241799
11	0,92050	1,84101	0,40143	1,44267	0,0000169394
12	0,90631	1,81262	0,43633	1,43146	0,0014473216
13	0,89101	1,78201	0,47124	1,42023	0,0007652430
14	0,87462	1,74924	0,50615	1,40898	0,0002302373
15	0,85717	1,71433	0,54105	1,39771	0,0011486671
16	0,83867	1,67734	0,57596	1,38642	0,0000703792
17	0,81915	1,63830	0,61087	1,37511	0,0006124823
18	0,79864	1,59727	0,64577	1,36376	0,0005526714
19	0,77715	1,55429	0,68068	1,35240	0,0000467287
20	0,75471	1,50942	0,71558	1,34100	0,0006686956
21	0,73135	1,46271	0,75049	1,32957	0,0001118432
22	0,70711	1,41421	0,78540	1,31812	0,0002806159
23	0,68200	1,36400	0,82030	1,30662	0,0004284101
24	0,65606	1,31212	0,85521	1,29509	0,0000030567
25	0,62932	1,25864	0,89012	1,28353	0,0004149132
26	0,60182	1,20363	0,92502	1,27192	0,0001379785
27	0,57358	1,14715	0,95993	1,26027	0,0001260390
28	0,54464	1,08928	0,99484	1,24858	0,0003395832
29	0,51504	1,03008	1,02974	1,23685	0,0000030503
30	0,48481	0,96962	1,06465	1,22506	0,0002630877
31	0,45399	0,90798	1,09956	1,21323	0,0001525785
32	0,42262	0,84524	1,13446	1,20134	0,0000498140
33	0,39073	0,78146	1,16937	1,18939	0,0002694983
34	0,35837	0,71674	1,20428	1,17739	0,0000181621
35	0,32557	0,65114	1,23918	1,16533	0,0001632151
36	0,29237	0,58474	1,27409	1,15321	0,0001570693
37	0,25882	0,51764	1,30900	1,14102	0,0000145737
38	0,22495	0,44990	1,34390	1,12876	0,0002115537
39	0,19081	0,38162	1,37881	1,11643	0,0000373229
40	0,15643	0,31287	1,41372	1,10403	0,0000970239
41	0,12187	0,24374	1,44862	1,09155	0,0001556697
42	0,08716	0,17431	1,48353	1,07899	0,0000012072
43	0,05234	0,10467	1,51844	1,06634	0,0001622100
44	0,01745	0,03490	1,55334	1,05360	0,0000553624
45	-0,01745	-0,03490	1,58825	1,04077	0,0000529750
46	-0,05234	-0,10467	1,62316	1,02784	0,0001470274
47	-0,08716	-0,17431	1,65806	1,01481	0,0000012104
48	-0,12187	-0,24374	1,69297	1,00168	0,0001205363
49	-0,15643	-0,31287	1,72788	0,98843	0,0000721217

50	-0,19081	-0,38162	1,76278	0,97507	0,0000245051
51	-0,22495	-0,44990	1,79769	0,96158	0,0001340089
52	-0,25882	-0,51764	1,83260	0,94797	0,0000089782
53	-0,29237	-0,58474	1,86750	0,93422	0,0000854529
54	-0,32557	-0,65114	1,90241	0,92033	0,0000841888
55	-0,35837	-0,71674	1,93732	0,90629	0,0000077824
56	-0,39073	-0,78146	1,97222	0,89210	0,0001179440
57	-0,42262	-0,84524	2,00713	0,87774	0,0000212643
58	-0,45399	-0,90798	2,04204	0,86321	0,0000566614
59	-0,48481	-0,96962	2,07694	0,84850	0,0000919553
60	-0,51504	-1,03008	2,11185	0,83359	0,0000007345
61	-0,54464	-1,08928	2,14675	0,81848	0,0000996476
62	-0,57358	-1,14715	2,18166	0,80315	0,0000351555
63	-0,60182	-1,20363	2,21657	0,78759	0,0000334781
64	-0,62932	-1,25864	2,25147	0,77179	0,0000948622
65	-0,65606	-1,31212	2,28638	0,75572	0,0000008003
66	-0,68200	-1,36400	2,32129	0,73938	0,0000804839
67	-0,70711	-1,41421	2,35619	0,72273	0,0000487896
68	-0,73135	-1,46271	2,39110	0,70577	0,0000168718
69	-0,75471	-1,50942	2,42601	0,68846	0,0000935075
70	-0,77715	-1,55429	2,46091	0,67079	0,0000064112
71	-0,79864	-1,59727	2,49582	0,65270	0,0000616271
72	-0,81915	-1,63830	2,53073	0,63418	0,0000612626
73	-0,83867	-1,67734	2,56563	0,61519	0,0000058656
74	-0,85717	-1,71433	2,60054	0,59566	0,0000883075
75	-0,87462	-1,74924	2,63545	0,57556	0,0000157968
76	-0,89101	-1,78201	2,67035	0,55481	0,0000436161
77	-0,90631	-1,81262	2,70526	0,53335	0,0000714822
78	-0,92050	-1,84101	2,74017	0,51107	0,0000006302
79	-0,93358	-1,86716	2,77507	0,48787	0,0000796877
80	-0,94552	-1,89104	2,80998	0,46361	0,0000280063
81	-0,95630	-1,91261	2,84489	0,43811	0,0000277449
82	-0,96593	-1,93185	2,87979	0,41114	0,0000785539
83	-0,97437	-1,94874	2,91470	0,38238	0,0000006680
84	-0,98163	-1,96325	2,94961	0,35141	0,0000684817
85	-0,98769	-1,97538	2,98451	0,31756	0,0000416250
86	-0,99255	-1,98509	3,01942	0,27980	0,0000146693
87	-0,99619	-1,99239	3,05433	0,23625	0,0000821740
88	-0,99863	-1,99726	3,08923	0,18283	0,0000055773
89	-0,99985	-1,99970	3,12414	0,10546	0,0000554481

Os coeficientes do polinômio de Lagrange, do termo de maior grau para o de menor grau, obtido estão expressos no a vetor descrito na Equação (5.23)

$$\begin{aligned}
L = & 1,01770 * 10^{23} & 1,01775 * 10^{23} & -2,18804 * 10^{24} \\
& -2,18815 * 10^{24} & 2,27135 * 10^{25} & 2,27148 * 10^{25} \\
& -1,51644 * 10^{26} & -1,51653 * 10^{26} & 7,31798 * 10^{26} \\
& 7,31843 * 10^{26} & -2,71985 * 10^{27} & -2,72002 * 10^{27} \\
& 8,10073 * 10^{27} & 8,10129 * 10^{27} & -1,98631 * 10^{28} \\
& -1,98646 * 10^{28} & 4,08812 * 10^{28} & 4,08844 * 10^{28} \\
& -7,16493 * 10^{28} & -7,16552 * 10^{28} & 1,08117 * 10^{29} \\
& 1,08127 * 10^{29} & -1,41671 * 10^{29} & -1,41685 * 10^{29} \\
& 1,62289 * 10^{29} & 1,62306 * 10^{29} & -1,63379 * 10^{29} \\
& -1,63397 * 10^{29} & 1,45147 * 10^{29} & 1,45164 * 10^{29} \\
& -1,14148 * 10^{29} & -1,14163 * 10^{29} & 7,96640 * 10^{28} \\
& 7,96749 * 10^{28} & -4,94128 * 10^{28} & -4,94206 * 10^{28} \\
& 2,72744 * 10^{28} & 2,72787 * 10^{28} & -1,34000 * 10^{28} \\
& -1,34026 * 10^{28} & 5,86135 * 10^{27} & 5,86243 * 10^{27} \\
& -2,28064 * 10^{27} & -2,28117 * 10^{27} & 7,88751 * 10^{26} \\
& 7,88931 * 10^{26} & -2,42021 * 10^{26} & -2,42089 * 10^{26} \\
& 6,57599 * 10^{25} & 6,57790 * 10^{25} & -1,57772 * 10^{25} \\
& -1,57826 * 10^{25} & 3,33179 * 10^{24} & 3,33301 * 10^{24} \\
& -6,16782 * 10^{23} & -6,17046 * 10^{23} & 9,96245 * 10^{22} \\
& 9,96717 * 10^{22} & -1,39608 * 10^{22} & -1,39685 * 10^{22} \\
& 1,68614 * 10^{21} & 1,68719 * 10^{21} & -1,74134 * 10^{20} \\
& -1,74258 * 10^{20} & 1,52341 * 10^{19} & 1,52466 * 10^{19} \\
& -1,11641 * 10^{18} & -1,11747 * 10^{18} & 6,76129 * 10^{16} \\
& 6,76867 * 10^{16} & -3,32838 * 10^{15} & -3,33256 * 10^{15} \\
& 1,30462 * 10^{14} & 1,30648 * 10^{14} & -3,96656 * 10^{12} \\
& -3,97282 * 10^{12} & 9,04047 * 10^{10} & 9,05532 * 10^{10} \\
& -1,47502 * 10^9 & -1,47715 * 10^9 & 1,61421 * 10^7 \\
& 1,615060 * 10^7 & -1,07438 * 10^5 & -1,07187 * 10^5 \\
& 3,700360 * 10^2 & 3,659200 * 10^2 & -4,82905 * 10^{-1} \\
& -4,62744 * 10^{-1} & 1,84416 * 10^{-4} & 1,64092 * 10^{-4}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

O valor mínimo do polinômio  $L(x)$  com os coeficientes mostrados na Equação (5.23) é  $-6,7507 * 10^{14}$ .

Dessa forma o polinômio utilizado será  $L_+(x) = L(x) + 6,7507 * 10^{14}$ .

Então  $P(y)$ , já fatorado, pode ser escrito como na Equação (5.24).

$$\begin{aligned}
 P(y) = & (y + 2,5254)(y^2 - 6,5948y + 10,9241) \\
 & (y^2 - 6,2876y + 10,3004)(y^2 - 5,7398y + 9,187) \\
 & (y^2 - 5,0582y + 7,7994)(y^2 - 4,351y + 6,3584) \\
 & (y^2 - 3,6944y + 5,021)(y^2 + 4,9438y + 6,1639) \\
 & (y^2 + 4,6628y + 5,6042)(y^2 - 3,1274y + 3,8615) \\
 & (y^2 + 4,2966y + 4,8814)(y^2 + 3,9262y + 4,1622) \\
 & (y^2 + 4,0238y + 4,1131)(y^2 + 3,9074y + 3,9345) \\
 & (y^2 + 3,9272y + 3,8645)(y^2 + 3,779y + 3,8362) \\
 & (y^2 + 3,6288y + 3,6576)(y^2 + 3,4354y + 3,3839) \\
 & (y^2 + 3,224y + 3,1041)(y^2 + 2,9968y + 2,8228) \\
 & (y^2 + 2,755y + 2,5459)(y^2 + 2,4998y + 2,2786) \\
 & (y^2 - 2,6728y + 2,9038)(y^2 + 2,2322y + 2,0257) \\
 & (y^2 - 2,475y + 2,3477)(y^2 - 2,214y + 2,0048) \\
 & (y^2 - 2,5244y + 1,6521)(y^2 - 2,4752y + 1,6941) \\
 & (y^2 - 2,5486y + 1,6304)(y^2 - 2,3994y + 1,7555) \\
 & (y^2 - 2,2954y + 1,8444)(y^2 + 1,9538y + 1,7927) \\
 & (y^2 - 1,9962y + 1,7869)(y^2 + 1,6658y + 1,5837) \\
 & (y^2 - 1,7058y + 1,5792)(y^2 + 1,3698y + 1,403) \\
 & (y^2 - 1,412y + 1,3998)(y^2 + 1,067y + 1,2541) \\
 & (y^2 - 1,111y + 1,2518)(y^2 + 0,759y + 1,1396) \\
 & (y^2 - 0,8044y + 1,1381)(y^2 + 0,4474y + 1,0619) \\
 & (y^2 - 0,4936y + 1,0611)(y^2 + 0,1338y + 1,0228) \\
 & (y^2 - 0,1804y + 1,0224)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Com  $P(y)$  fatorado se pode encontrar o campo elétrico  $E(z)$  equivalente para cada termo.

1)  $P(y) = (y + 2,5254) \therefore$

$$E(z) = 0,7012 + 1,4261z^{-1}$$

2)  $P(y) = (y^2 - 6,5948y + 10,9241) \therefore$

$$E(z) = 2,9733 - 1,9926z^{-1} + 0,3363z^{-2}$$

**3)**  $P(y) = (y^2 - 6,2876y + 10,3004) \therefore$

$$E(z) = 2,9045 - 1,9353z^{-1} + 0,3443z^{-2}$$

**4)**  $P(y) = (y^2 - 5,7398y + 9,187) \therefore$

$$E(z) = 2,7764 - 1,8299z^{-1} + 0,3602z^{-2}$$

**5)**  $P(y) = (y^2 - 5,0582y + 7,7994) \therefore$

$$E(z) = 2,6056 - 1,6921z^{-1} + 0,3838z^{-2}$$

**6)**  $P(y) = (y^2 - 4,351y + 6,3584) \therefore$

$$E(z) = 2,4118 - 1,5394z^{-1} + 0,4146z^{-2}$$

**7)**  $P(y) = (y^2 - 3,6944y + 5,021) \therefore$

$$E(z) = 2,2122 - 1,3867z^{-1} + 0,4520z^{-2}$$

**8)**  $P(y) = (y^2 + 4,9438y + 6,1639) \therefore$

$$E(z) = 0,4994 + 1,9761z^{-1} + 2,0024z^{-2}$$

**9)**  $P(y) = (y^2 + 4,6628y + 5,6042) \therefore$

$$E(z) = 0,5214 + 1,9115z^{-1} + 1,9179z^{-2}$$

**10)**  $P(y) = (y^2 - 3,1274y + 3,8615) \therefore$

$$E(z) = 2,0164 - 1,2448z^{-1} + 0,4959z^{-2}$$

**11)**  $P(y) = (y^2 + 4,2966y + 4,8814) \therefore$

$$E(z) = 0,5542 + 1,8217z^{-1} + 1,8043z^{-2}$$

**12)**  $P(y) = (y^2 + 3,9262y + 4,1622) \therefore$

$$E(z) = 0,5931 + 1,7226z^{-1} + 1,6861z^{-2}$$

**13)**  $P(y) = (y^2 + 4,0238y + 4,1131) \therefore$

$$E(z) = 0,6912 + 1,8821z^{-1} + 1,4468z^{-2}$$

**14)**  $P(y) = (y^2 + 3,9074y + 3,9345) \therefore$

$$E(z) = 0,6744 + 1,8113z^{-1} + 1,4829z^{-2}$$

**15)**  $P(y) = (y^2 + 3,9272y + 3,8645) \therefore$

$$E(z) = 0,8350 + 1,9321z^{-1} + 1,1976z^{-2}$$

**16)**  $P(y) = (y^2 + 3,779y + 3,8362) \therefore$

$$E(z) = 0,6247 + 1,6980z^{-1} + 1,6008z^{-2}$$

**17)**  $P(y) = (y^2 + 3,6288y + 3,6576) \therefore$

$$E(z) = 0,6113 + 1,6148z^{-1} + 1,6360z^{-2}$$

**18)**  $P(y) = (y^2 + 3,4354y + 3,3839) \therefore$

$$E(z) = 0,6120 + 1,5296z^{-1} + 1,6339z^{-2}$$

**19)**  $P(y) = (y^2 + 3,224y + 3,1041) \therefore$

$$E(z) = 0,6122 + 1,4357z^{-1} + 1,6335z^{-2}$$

**20)**  $P(y) = (y^2 + 2,9968y + 2,8228) \therefore$

$$E(z) = 0,6124 + 1,3347z^{-1} + 1,6329z^{-2}$$

**21)**  $P(y) = (y^2 + 2,755y + 2,5459) \therefore$

$$E(z) = 0,6126 + 1,2272z^{-1} + 1,6324z^{-2}$$

**22)**  $P(y) = (y^2 + 2,4998y + 2,2786) \therefore$

$$E(z) = 0,6128 + 1,1137z^{-1} + 1,6318z^{-2}$$

**23)**  $P(y) = (y^2 - 2,6728y + 2,9038) \therefore$

$$E(z) = 1,8266 - 1,1258z^{-1} + 0,5475z^{-2}$$

**24)**  $P(y) = (y^2 + 2,2322y + 2,0257) \therefore$

$$E(z) = 0,6131 + 0,9947z^{-1} + 1,6311z^{-2}$$

**25)**  $P(y) = (y^2 - 2,475y + 2,3477) \therefore$

$$E(z) = 1,6745 - 1,0895z^{-1} + 0,5972z^{-2}$$

**26)**  $P(y) = (y^2 - 2,214y + 2,0048) \therefore$

$$E(z) = 1,6290 - 0,9871z^{-1} + 0,6139z^{-2}$$

**27)**  $P(y) = (y^2 - 2,5244y + 1,6521) \therefore$

$$E(z) = 1,1673 - 1,2472z^{-1} + 0,8567z^{-2}$$

**28)**  $P(y) = (y^2 - 2,4752y + 1,6941) \therefore$

$$E(z) = 1,2832 - 1,2001z^{-1} + 0,7793z^{-2}$$

**29)**  $P(y) = (y^2 - 2,5486y + 1,6304) \therefore$

$$E(z) = 1,0539 - 1,2725z^{-1} + 0,9489z^{-2}$$

**30)**  $P(y) = (y^2 - 2,3994y + 1,7555) \therefore$

$$E(z) = 1,3982 - 1,1353z^{-1} + 0,7152z^{-2}$$

**31)**  $P(y) = (y^2 - 2,2954y + 1,8444) \therefore$

$$E(z) = 1,5149 - 1,0554z^{-1} + 0,6601z^{-2}$$

**32)**  $P(y) = (y^2 + 1,9538y + 1,7927) \therefore$

$$E(z) = 0,6133 + 0,8708z^{-1} + 1,6304z^{-2}$$

- 33)  $P(y) = (y^2 - 1,9962y + 1,7869) \therefore$   
 $E(z) = 1,6137 - 0,8938z^{-1} + 0,6197z^{-2}$
- 34)  $P(y) = (y^2 + 1,6658y + 1,5837) \therefore$   
 $E(z) = 0,6136 + 0,7426z^{-1} + 1,6296z^{-2}$
- 35)  $P(y) = (y^2 - 1,7058y + 1,5792) \therefore$   
 $E(z) = 1,6169 - 0,7631z^{-1} + 0,6185z^{-2}$
- 36)  $P(y) = (y^2 + 1,3698y + 1,403) \therefore$   
 $E(z) = 0,6139 + 0,6108z^{-1} + 1,6288z^{-2}$
- 37)  $P(y) = (y^2 - 1,412y + 1,3998) \therefore$   
 $E(z) = 1,6184 - 0,6314z^{-1} + 0,6179z^{-2}$
- 38)  $P(y) = (y^2 + 1,067y + 1,2541) \therefore$   
 $E(z) = 0,6143 + 0,4759z^{-1} + 1,6280z^{-2}$
- 39)  $P(y) = (y^2 - 1,111y + 1,2518) \therefore$   
 $E(z) = 1,6199 - 0,4966z^{-1} + 0,6173z^{-2}$
- 40)  $P(y) = (y^2 + 0,759y + 1,1396) \therefore$   
 $E(z) = 0,6146 + 0,3386z^{-1} + 1,6270z^{-2}$
- 41)  $P(y) = (y^2 - 0,8044y + 1,1381) \therefore$   
 $E(z) = 1,6213 - 0,3594z^{-1} + 0,6168z^{-2}$
- 42)  $P(y) = (y^2 + 0,4474y + 1,0619) \therefore$   
 $E(z) = 0,6150 + 0,1996z^{-1} + 1,6260z^{-2}$

$$43) P(y) = (y^2 - 0,4936y + 1,0611) \therefore$$

$$E(z) = 1,6225 - 0,2205z^{-1} + 0,6163z^{-2}$$

$$44) P(y) = (y^2 + 0,1338y + 1,0228) \therefore$$

$$E(z) = 0,6154 + 0,0597z^{-1} + 1,6250z^{-2}$$

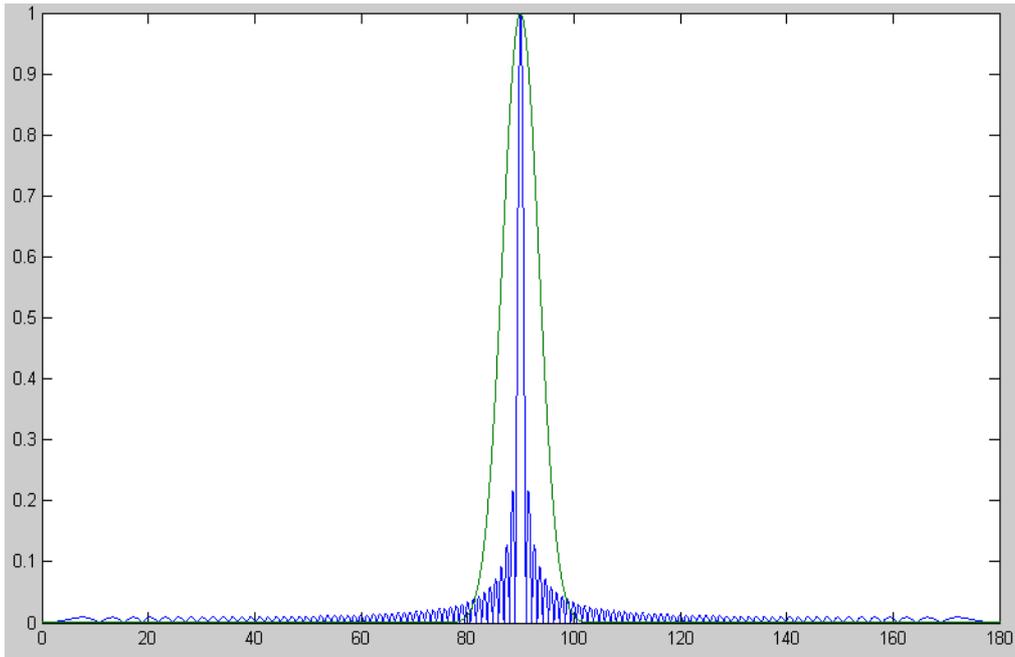
$$45) P(y) = (y^2 - 0,1804y + 1,0224) \therefore$$

$$E(z) = 1,6238 - 0,0805z^{-1} + 0,6158z^{-2}$$

O campo elétrico  $E(z)$  final é o produto dos campos elétricos calculados anteriormente. Ou seja:

$$\begin{aligned}
E(z) = & 5,0879 + 170,5468z^{-1} + 2874,41z^{-2} + 3,2420 \times 10^4 z^{-3} + \\
& 2,7484 \times 10^5 z^{-4} + 1,8650 \times 10^6 z^{-5} + 1,0536 \times 10^7 z^{-6} + \\
& 5,0905 \times 10^7 z^{-7} + 2,1441 \times 10^8 z^{-8} + 7,9888 \times 10^8 z^{-9} + \\
& 2,6629 \times 10^9 z^{-10} + 8,0137 \times 10^9 z^{-11} + 2,1935 \times 10^{10} z^{-12} + \\
& 5,4956 \times 10^{10} z^{-13} + 1,2672 \times 10^{11} z^{-14} + 2,7025 \times 10^{11} z^{-15} + \\
& 5,3548 \times 10^{11} z^{-16} + 9,8999 \times 10^{11} z^{-17} + 1,7148 \times 10^{12} z^{-18} + \\
& 2,7940 \times 10^{12} z^{-19} + 4,2988 \times 10^{12} z^{-20} + 6,2686 \times 10^{12} z^{-21} + \\
& 8,6934 \times 10^{12} z^{-22} + 1,1500 \times 10^{13} z^{-23} + 1,4553 \times 10^{13} z^{-24} + \\
& 1,7656 \times 10^{13} z^{-25} + 2,0581 \times 10^{13} z^{-26} + 2,3088 \times 10^{13} z^{-27} + \\
& 2,4966 \times 10^{13} z^{-28} + 2,6058 \times 10^{13} z^{-29} + 2,6284 \times 10^{13} z^{-30} + \\
& 2,5645 \times 10^{13} z^{-31} + 2,4226 \times 10^{13} z^{-32} + 2,2174 \times 10^{13} z^{-33} + \\
& 1,9678 \times 10^{13} z^{-34} + 1,6940 \times 10^{13} z^{-35} + 1,4153 \times 10^{13} z^{-36} + \\
& 1,1480 \times 10^{13} z^{-37} + 9,0430 \times 10^{12} z^{-38} + 6,9201 \times 10^{12} z^{-39} + \\
& 5,1449 \times 10^{12} z^{-40} + 3,7163 \times 10^{12} z^{-41} + 2,6084 \times 10^{12} z^{-42} + \\
& 1,7793 \times 10^{12} z^{-43} + 1,1792 \times 10^{12} z^{-44} + 7,5897 \times 10^{11} z^{-45} + \\
& 4,7445 \times 10^{11} z^{-46} + 2,8831 \times 10^{11} z^{-47} + 1,7006 \times 10^{11} z^{-48} + \\
& 9,7034 \times 10^{10} z^{-49} + 5,3761 \times 10^{10} z^{-50} + 2,9185 \times 10^{10} z^{-51} + \\
& 1,5206 \times 10^{10} z^{-52} + 7,4171 \times 10^9 z^{-53} + 3,6933 \times 10^9 z^{-54} + \\
& 2,0053 \times 10^9 z^{-55} + 6,9622 \times 10^8 z^{-56} + 1,7985 \times 10^8 z^{-57} + \\
& 3,1314 \times 10^8 z^{-58} + 1,9244 \times 10^8 z^{-59} - 2,8967 \times 10^8 z^{-60} + \\
& 1,5755 \times 10^8 z^{-61} + 1,3976 \times 10^8 z^{-62} - 1,6930 \times 10^8 z^{-63} + \\
& -1,0535 \times 10^8 z^{-64} + 3,9733 \times 10^8 z^{-65} - 4,0859 \times 10^8 z^{-66} + \\
& 1,4413 \times 10^8 z^{-67} + 1,3553 \times 10^8 z^{-68} - 1,8203 \times 10^8 z^{-69} + \\
& -4,1813 \times 10^7 z^{-70} + 3,8047 \times 10^8 z^{-71} - 6,3999 \times 10^8 z^{-72} + \\
& 7,1867 \times 10^8 z^{-73} - 6,3287 \times 10^8 z^{-74} + 4,6345 \times 10^8 z^{-75} + \\
& -2,9026 \times 10^8 z^{-76} + 1,5780 \times 10^8 z^{-77} - 7,5035 \times 10^7 z^{-78} + \\
& 3,1295 \times 10^7 z^{-79} - 1,1440 \times 10^7 z^{-80} + 3,6503 \times 10^6 z^{-81} + \\
& -1,0091 \times 10^6 z^{-82} + 238951z^{-83} - 47641,2z^{-84} + \\
& 7800,89z^{-85} - 1009,99z^{-86} + 97,1886z^{-87} + \\
& -6,1936z^{-88} + 0,1965z^{-89}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

A partir da Equação (5.25) é gerada a Figura (5.25) comparando a curva desejada e a curva obtida.



**Figura 5.25 – Curva Modelo (azul) x Curva Obtida via Interpolação (verde)**

Como pode ser visto na Figura (5.26) a curva obtida fica bem distante da curva desejada porque, principalmente, com este número de elementos o erro de arredondamento acumulado tem um impacto maior que o tolerável, além do método da interpolação polinomial não ser o mais indicado para construir antenas com especificações rígidas (que geram alto número de elementos).

A largura de banda de meia potência da curva modelo é  $0,5^\circ$ , enquanto a largura de banda de meia potência da curva obtida na síntese é  $2,8^\circ$ , muito longe da especificação dada.

Como conclusão, o conjunto obtido não pode ser utilizado em um sistema satelital.

#### 5.2.1.2. Diagrama Vertical

Como na antena em análise as especificações do diagrama horizontal e vertical são as mesmas, o conjunto obtido via método da interpolação polinomial é o mesmo que o obtido para atender as especificações do diagrama horizontal.

Conforme já foi visto que o conjunto obtido não atende as especificações desejadas.

### 5.2.1.3. Campo Resultante no Espaço.

Neste caso, o conjunto resultante teria  $90 \times 90$ , ou seja, 8100 elementos que ainda assim não seriam capazes de atender as especificações pedidas, pois o método não se mostrou eficaz quando o número de elementos é alto.

Por este motivo não serão gerados os gráficos tri-dimensionais do conjunto obtido já que o mesmo não será útil.

## 5.2.2. Método da Função de Abertura Linear

### 5.2.2.1. Diagrama Horizontal

Como dito no início da Seção, ter baixos níveis de lobo lateral é uma característica interessante quando se trata de uma antena para uso em aplicações satelitais [14]. Após algumas simulações no Matlab, os primeiros valores de  $S$  e  $R$  que atendiam as especificações de largura de banda de meia potência com bom nível de lobo lateral foi  $S = 64$  e  $R = 60$ , neste caso foi buscado o primeiro valor de  $S$  e  $R$  cujo erro médio quadrático na faixa do lobo principal não ultrapassasse 5% e o  $NLL > 20\text{dB}$ . O diagrama de irradiação gerado por esta combinação possui abertura de meia potência igual a  $0,6^\circ$  e  $NLL = 26,7\text{dB}$  contra  $13,3\text{dB}$  do diagrama modelo.

A Figura (5.26) traz a comparação entre as curvas.

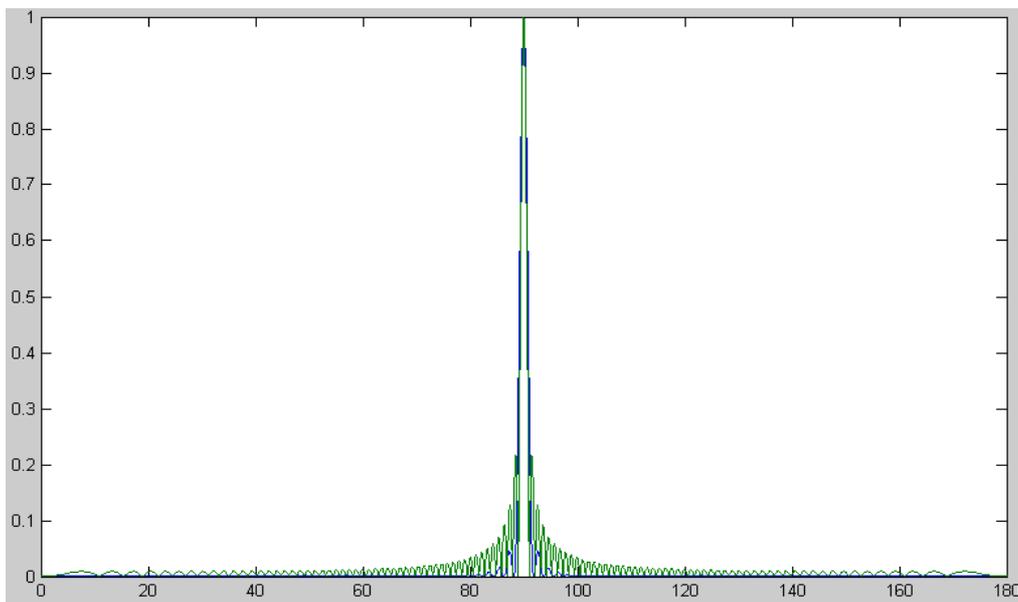


Figura 5.26 – Curva de  $E_{\text{eff}}(x)$  (em azul) e curva modelo (em verde)

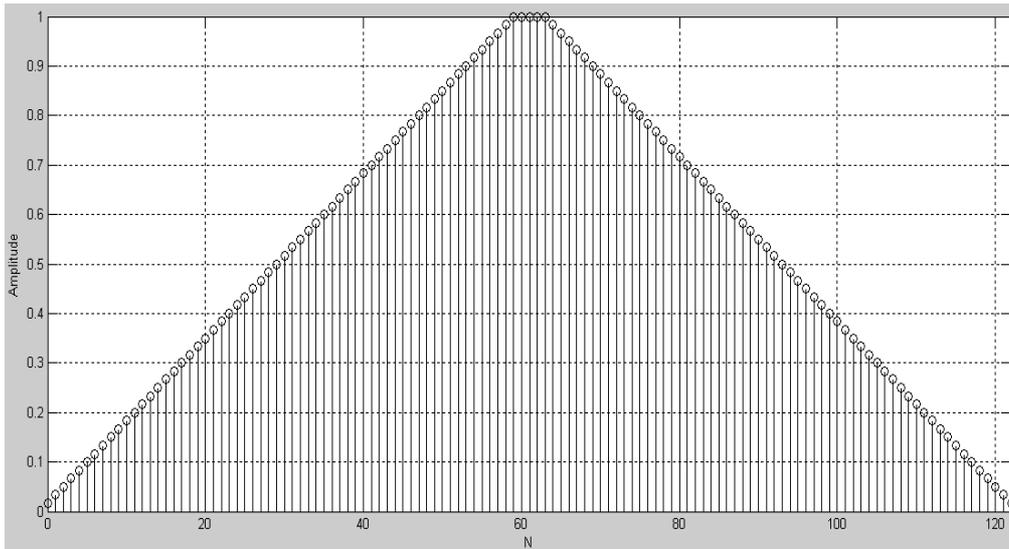
As equações que representam  $E_1$  e  $E_2$  são:

$$E_1(x) = \left( \frac{1}{60} \sum_{i=0}^{59} x^i \right) \text{ e } E_2(x) = \left( \sum_{i=0}^{63} x^i \right) \quad (5.26)$$

Esta construção será feita de forma que a antena de transmissão atenda às especificações de irradiação no plano horizontal e a antena de recepção atenda às especificações de irradiação do plano vertical. Assim sendo, para este caso,  $E_T = E_{\text{eff}}$  e  $E_R = 1$ . Então:

$$\begin{aligned} E_T(x) = & \frac{1}{60} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \\ & 9x^8 + 10x^9 + 11x^{10} + 12x^{11} + 13x^{12} + 14x^{13} + \\ & 15x^{14} + 16x^{15} + 17x^{16} + 18x^{17} + 19x^{18} + 20x^{19} + \\ & 21x^{20} + 22x^{21} + 23x^{22} + 24x^{23} + 25x^{24} + 26x^{25} + \\ & 27x^{26} + 28x^{27} + 29x^{28} + 30x^{29} + 31x^{30} + 32x^{31} + \\ & 33x^{32} + 34x^{33} + 35x^{34} + 36x^{35} + 37x^{36} + 38x^{37} + \\ & 39x^{38} + 40x^{39} + 41x^{40} + 42x^{41} + 43x^{42} + 44x^{43} + \\ & 45x^{44} + 46x^{45} + 47x^{46} + 48x^{47} + 49x^{48} + 50x^{49} + \\ & 51x^{50} + 52x^{51} + 53x^{52} + 54x^{53} + 55x^{54} + 56x^{55} + \\ & 57x^{56} + 58x^{57} + 59x^{58} + 60x^{59} + 60x^{60} + 60x^{61} + \\ & 60x^{62} + 60x^{63} + 59x^{64} + 58x^{65} + 57x^{66} + 56x^{67} + \\ & 55x^{68} + 54x^{69} + 53x^{70} + 52x^{71} + 51x^{72} + 50x^{73} + \\ & 49x^{74} + 48x^{75} + 47x^{76} + 46x^{77} + 45x^{78} + 44x^{79} + \\ & 43x^{80} + 42x^{81} + 41x^{82} + 40x^{83} + 39x^{84} + 38x^{85} + \\ & 37x^{86} + 36x^{87} + 35x^{88} + 34x^{89} + 33x^{90} + 32x^{91} + \\ & 31x^{92} + 30x^{93} + 29x^{94} + 28x^{95} + 27x^{96} + 26x^{97} + \\ & 25x^{98} + 24x^{99} + 23x^{100} + 22x^{101} + 21x^{102} + 20x^{103} + \\ & 19x^{104} + 18x^{105} + 17x^{106} + 16x^{107} + 15x^{108} + 14x^{109} + \\ & 13x^{110} + 12x^{111} + 11x^{112} + 10x^{113} + 9x^{114} + 8x^{115} + \\ & 7x^{116} + 6x^{117} + 5x^{118} + 4x^{119} + 3x^{120} + 2x^{121} + x^{122} ) \end{aligned} \quad (5.27)$$

A Figura (5.27) mostra como é a distribuição de corrente no conjunto obtido. O diagrama de irradiação deste conjunto é o mostrado na Figura (5.26).



**Figura 5.27 – Distribuição de Corrente por Elemento de Antena.**

### 5.2.2.2. Diagrama Vertical

As especificações de irradiação no plano vertical são as mesmas do plano horizontal. Dessa forma os valores de  $R$  e  $S$  escolhidos são os mesmos que os escolhidos para o caso horizontal só que desta vez é a antena de recepção que será construída para atender as especificações do plano vertical.

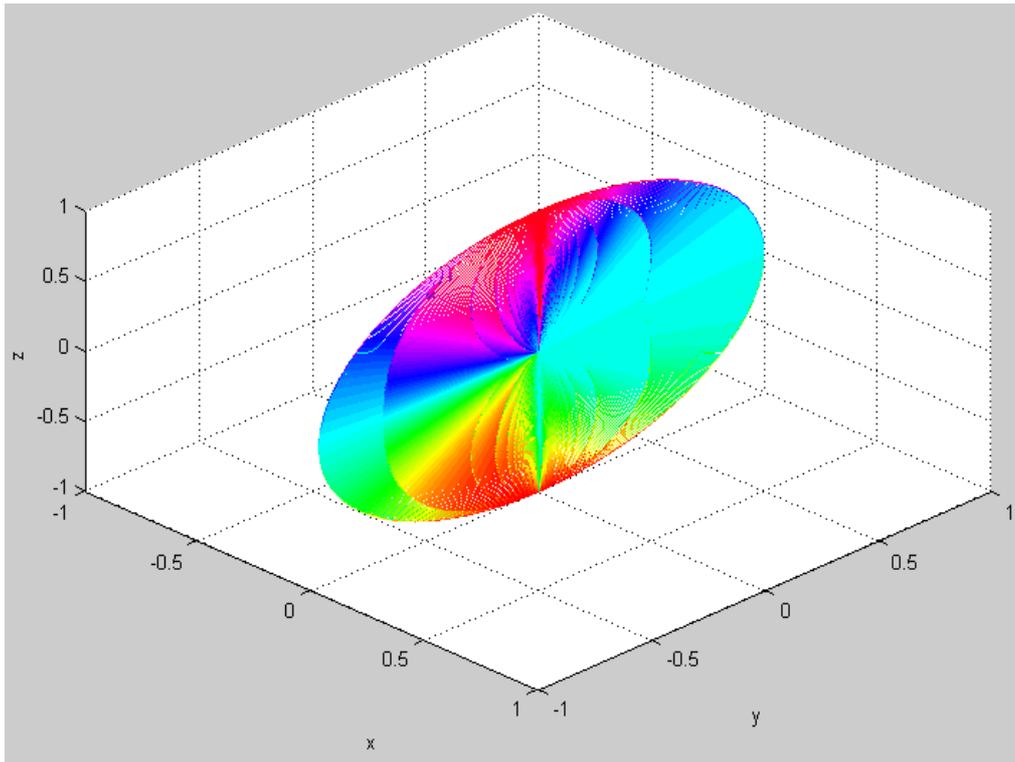
Sendo assim, tem-se,  $E_T = 1$  e  $E_R = E_{\text{eff}}$  e  $E_R$  é expresso pela Equação (5.27).

### 5.2.2.3. Campo Resultante no Espaço.

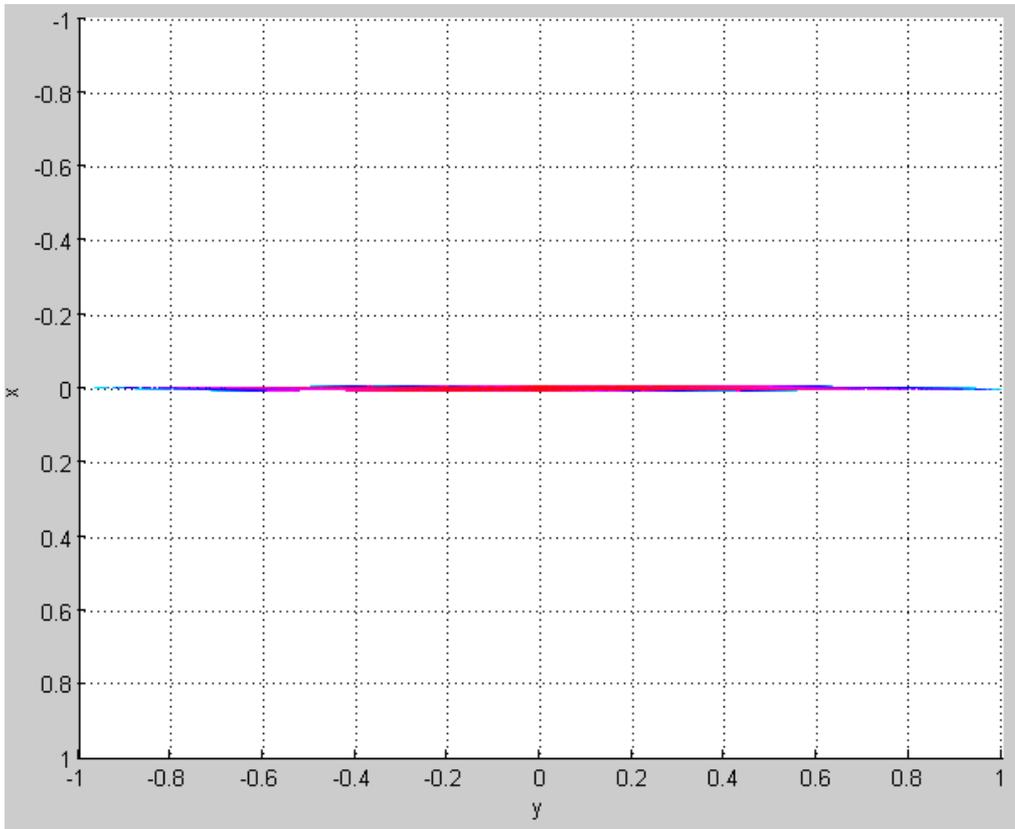
Para analisar o campo no espaço são aplicadas as transformações descritas nas Equações (5.21) e (5.22):

A direção de máxima irradiação será o eixo  $z$ , ou seja,  $\theta_0 = 0^\circ$ , o que implica em  $\alpha_x = 0$  e  $\alpha_y = 0$ .

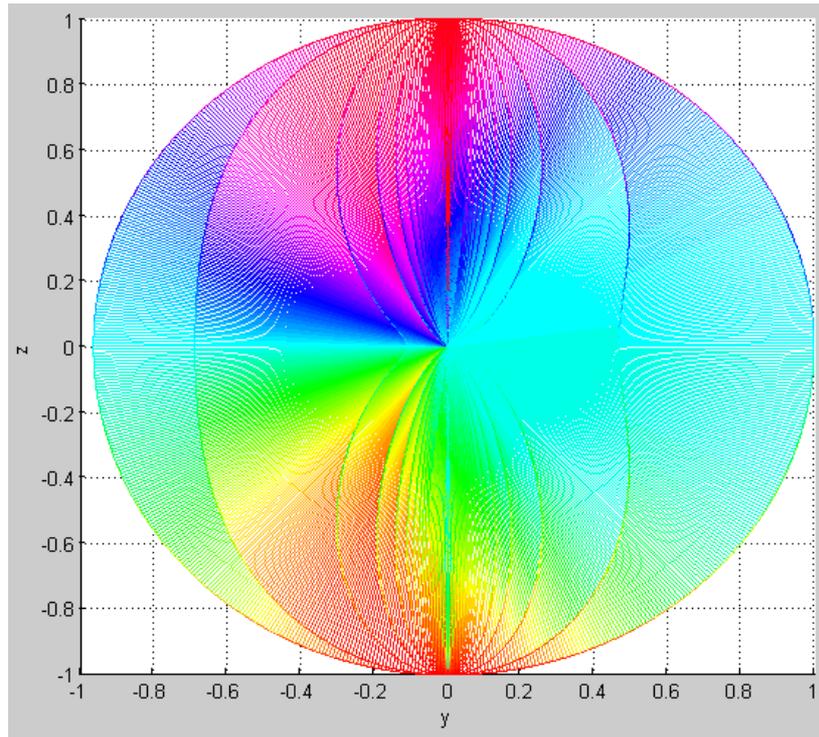
A Figura (5.28) mostra a irradiação do campo elétrico da antena de transmissão no espaço. As Figuras (5.29) e (5.30) mostram, respectivamente, suas projeções no plano horizontal e vertical.



**Figura 5.28 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Transmissão**

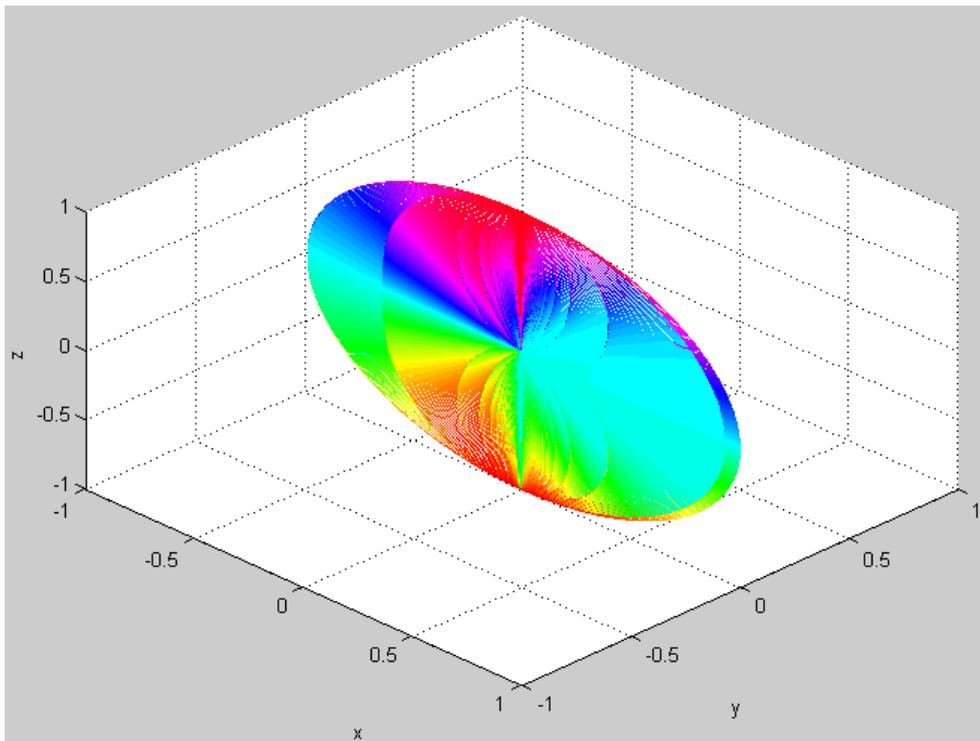


**Figura 5.29 – Projeção Horizontal (plano  $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_T(x,y)$**



**Figura 5.30 – Projeção Vertical (plano  $yz$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_T(x,y)$**

Assim como esperado, pode-se notar através das Figuras (5.28), (5.29) e (5.30) que a antena de transmissão é altamente diretiva, irradiando em uma faixa muito estreita, em seu plano horizontal e omnidirecional em seu plano vertical.



**Figura 5.31 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência da Antena de Recepção**

Por sua vez as Figuras (5.31), (5.32) e (5.33) mostram que a antena de recepção é altamente diretiva em seu plano vertical e omnidirecional em seu plano horizontal.

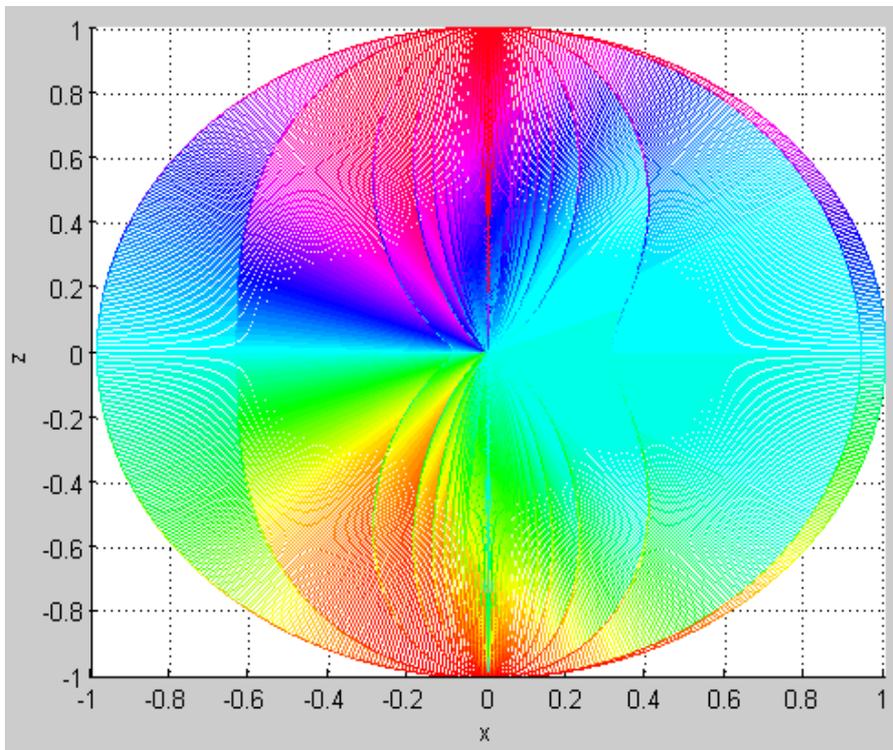


Figura 5.32 – Projeção Horizontal (plano  $xz$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_R(x,y)$

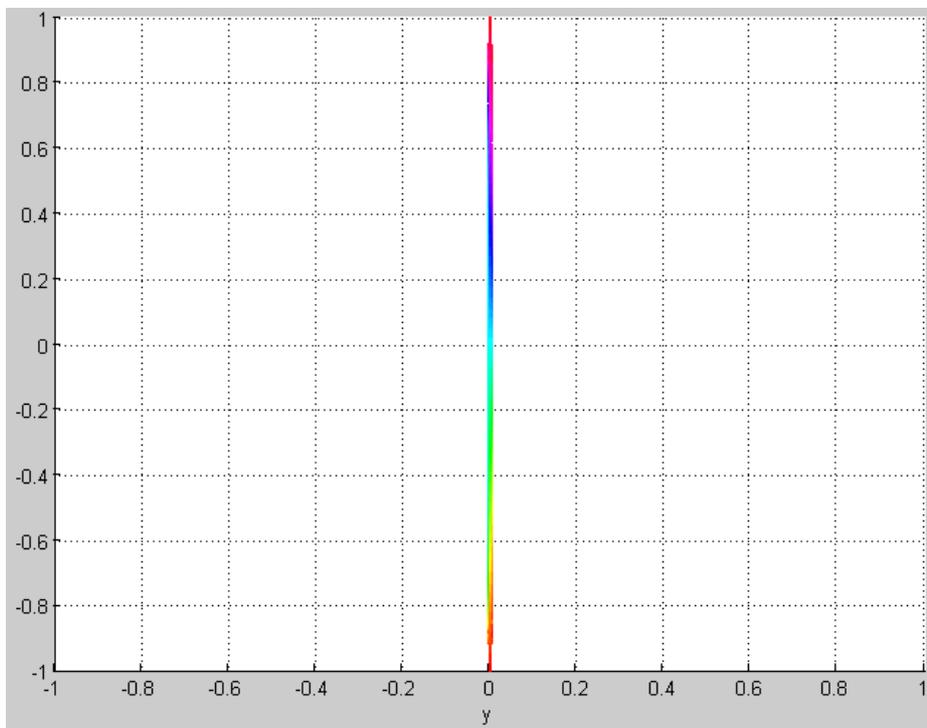
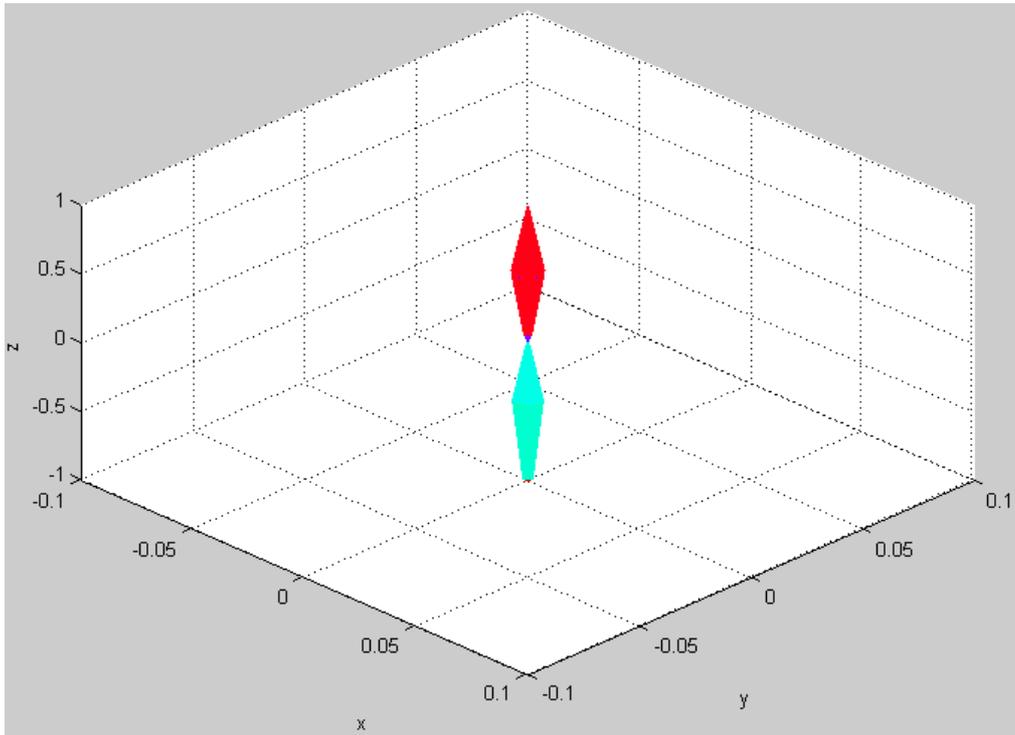
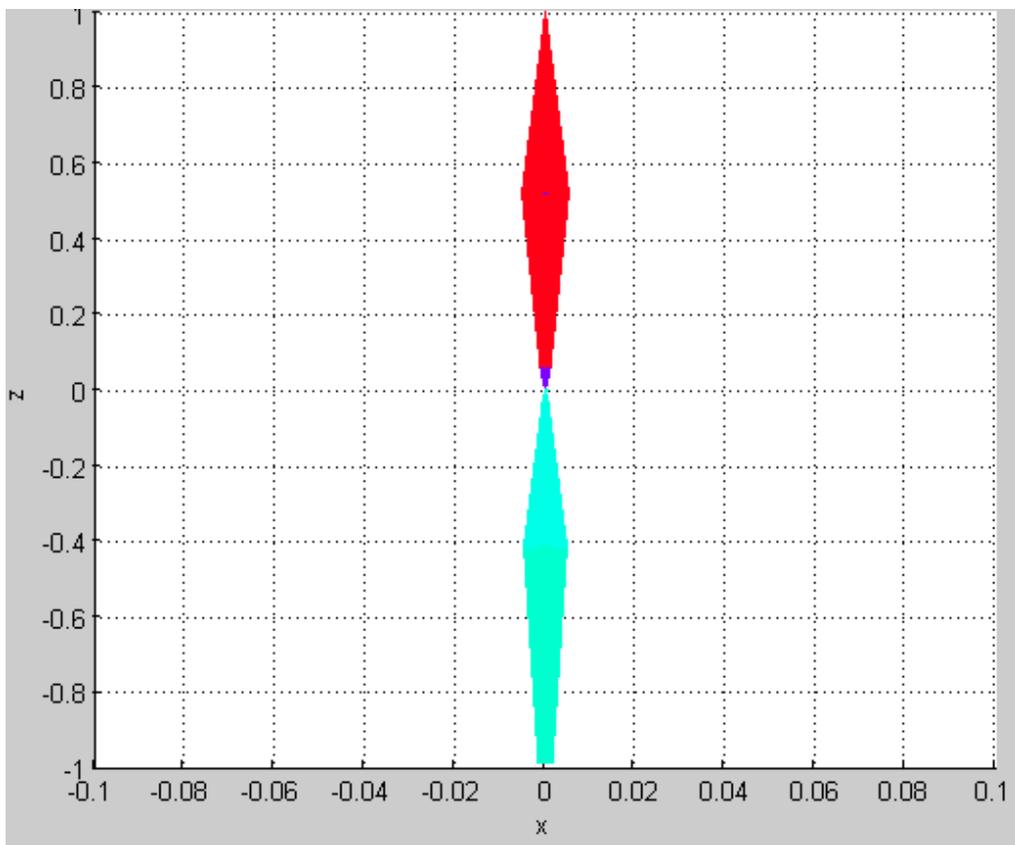


Figura 5.33 – Projeção vertical (plano  $xy$ ) do Diagrama de Irradiação de  $E_R(x,y)$

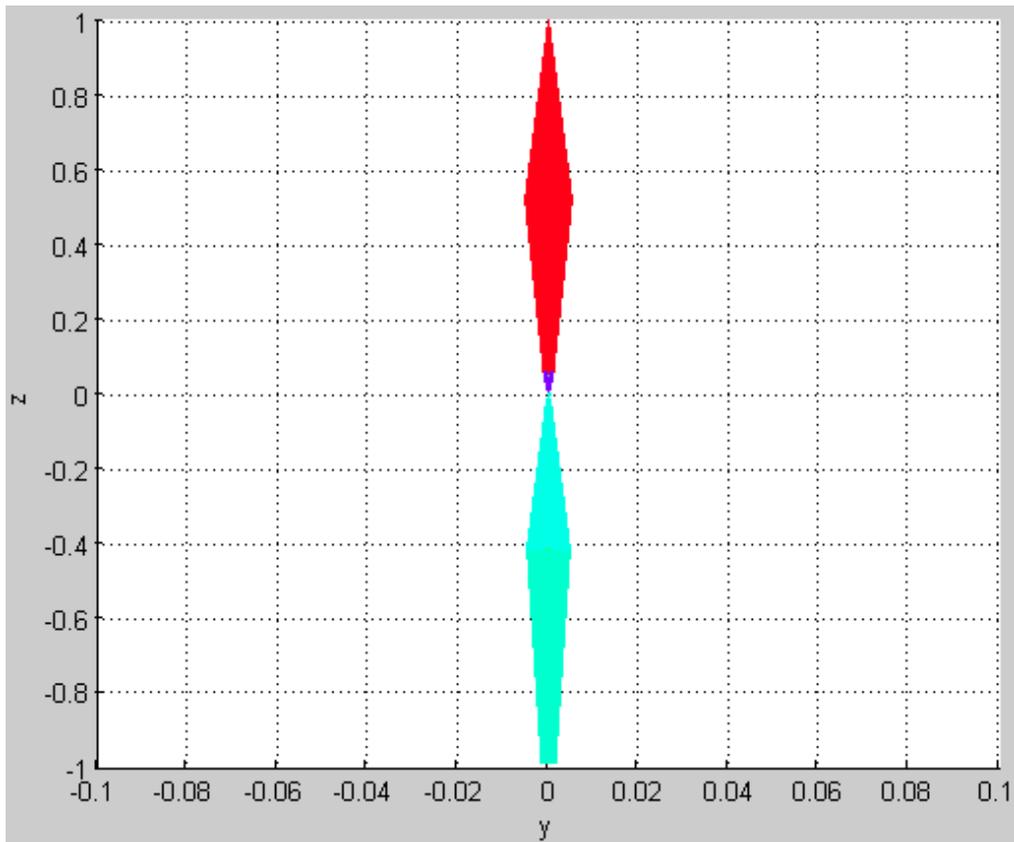
Por fim, as Figuras (5.34), (5.35) e (5.36) mostram detalhes do diagrama de irradiação efetivo das antenas.



**Figura 5.34 – Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante**



**Figura 5.35 – Projeção xz do Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante**



**Figura 5.36 – Projeção yz do Diagrama de Irradiação Espacial de Potência Resultante**

O diagrama efetivo possui a mesma abertura de irradiação nos planos  $xz$  e  $yz$  (horizontal e vertical). Vale atentar que nas Figuras (5.34), (5.35) e (5.36) a escala dos eixos  $x$  e  $y$  é 10 vezes maior que a do eixo  $z$ . Para atender as especificações seria utilizado um total de  $2N$  elementos, ou seja, 246 elementos (com  $N = 123$ ) contra os 8100 elementos do método da interpolação polinomial.

Como dito no início da seção, as antenas de satélite trabalham com altíssimas potências e o tipo de solução desenhada (com as antenas de transmissão e recepção sendo responsáveis pelas especificações de apenas um plano e sendo omnidirecional no outro) tem um problema que é a grande quantidade de energia irradiada fora da região do lobo principal da antena (interferência causada em sistemas adjacentes). No caso em questão não havia nenhum requisito específico para a antena de transmissão ou recepção, mas poderia haver algum requisito relacionado à largura de banda de uma delas (ou ambas) especificamente para evitar a interferência em (ou de) sistemas adjacentes.

Vale lembrar que a simulação está sendo feita considerando radiadores isotrópicos (que não existem na prática). Em casos reais, uma forma de minimizar este tipo de problema é utilizar no *array* de antenas elementos irradiantes cujo fator de elemento reduza a largura de banda no plano de irradiação onde o campo elétrico devido ao fator de conjunto é omnidirecional. Por exemplo, no caso da antena de transmissão do caso em estudo, que possui o campo elétrico devido ao fator de conjunto omnidirecional no plano vertical, os irradiadores escolhidos poderiam ser dipolos de meia-onda posicionados verticalmente, pois estes possuem largura de banda de meia-potência igual a  $78^\circ$  no plano vertical e são omnidirecionais no plano horizontal [4]. Da Equação (4.41) tem-se que o campo elétrico irradiado é o produto entre o fator de elemento e o fator de conjunto, dessa forma, o campo elétrico irradiado pelo conjunto em questão ficaria inalterado no plano horizontal (já que o dipolo posicionado verticalmente irradia omnidirecionalmente no plano horizontal) e deixaria de ser omnidirecional no plano vertical para ter o aspecto descrito na Figura (2.12). Caso a especificação não possa ser atendida apenas com o fator de elemento, uma nova escolha de  $E_T$  e  $E_R$  será necessária.

Já que o primeiro método se mostrou ineficaz para este tipo de antena, não será feita comparação entre os métodos.

## 6. Conclusão

### 6.1. Considerações Finais

Com o apresentado até aqui, foi possível alcançar os principais objetivos traçados para este trabalho. Em primeiro lugar, foi possível estudar e destrinchar uma das formas possíveis de se usar a teoria de processamento de sinais, mais especificamente a teoria de construção de filtros FIR, para sintetizar conjuntos de antenas com um número menor de elementos. Para isso, foi necessário o estudo da teoria de antenas no Capítulo 2 e o estudo da teoria de processamento de sinais no Capítulo 3, para só então ser capaz de estudar uma forma de combinar as duas teorias.

No Capítulo 5, onde foram realizadas as simulações do uso das técnicas de síntese a partir de especificações de antenas reais, foi possível estudar as principais diferenças entre os resultados obtidos pelos dois métodos, onde se pode observar que, nos casos estudados, as soluções obtidas através do método Função Abertura Linear possuem um número menor de elementos, além de, em geral, possuírem complexidade de construção menor. Já as soluções obtidas através método da Interpolação Polinomial são em geral mais robustas. As soluções obtidas através deste método são mais resistentes a problemas de natureza real (como o descasamento entre os máximos de transmissão e recepção), além de, em geral, causarem menos problemas de interferência a sistemas adjacentes, pois como toda a especificação de irradiação é atendida pela antena de transmissão, a irradiação da energia é mais concentrada na região de interesse. Isso ficou bem evidente na solução obtida para o sistema de antenas de satélites via método função abertura linear, onde no plano vertical o conjunto de antenas de transmissão irradiava de forma omnidirecional.

É possível concluir também, pelas características de cada método, existem cenários em que um deles será mais adequado que o outro.

Quando as especificações de projeto contiverem requisitos especificamente voltados à antena de recepção e transmissão simultaneamente (e não apenas uma das duas), o método da Função Abertura Linear será o mais indicado por envolver as duas antenas no projeto. Outro cenário em que este método é mais

indicado é quando as especificações de Nível de Lobo Lateral forem muito rígidas, já que há uma forma clara de controlá-lo (fazendo  $R$  na Equação (4.36) maior), forma esta que não existe no método da Interpolação Polinomial. Mais um exemplo de cenário em que o método Função Abertura Linear é mais indicado é quando a solução se tornar muito complexa (envolvendo polinômios de alto grau), como foi visto na Seção 5.2 os erros de arredondamento causam degradações intoleráveis na solução obtida.

Analogamente, em projetos cuja questão da interferência causada em sistemas adjacentes for muito sensível, o uso do método da Interpolação Polinomial é mais indicado. Outro cenário onde fica clara a vantagem em usar o método da Interpolação Polinomial é quando se deseja obter uma antena para transmissão em *Broadcast* (ou qualquer tipo de transmissão ponto/multiponto), em qualquer sistema deste tipo haverá mais receptores (consequentemente antenas de recepção) que transmissores (e consequentemente antenas de transmissão). Neste cenário, faz sentido colocar toda a especificação de irradiação na antena de transmissão, deixando a antena de recepção o mais simples possível.

A Tabela (6.1) traz um quadro comparativo com as principais vantagens e desvantagens de cada método.

**Tabela 6.1 – Comparativo entre os Métodos**

Método	Vantagens	Desvantagens
Interpolação Polinomial	<p>Solução mais robusta.</p> <p>Solução mais resistentes a problemas de ordem prática, como a degradação de elementos do sistema ou do próprio meio.</p> <p>Causa menos interferências a sistemas adjacentes.</p>	<p>Os conjuntos obtidos por este método tendem a ser mais complexos no âmbito de sua construção.</p> <p>A solução exige um número maior de elementos quando comparado ao outro método (Abertura Linear)</p> <p>Dada a maior complexidade de construção e a maior quantidade de elementos o seu custo de produção é maior.</p> <p>O Método não apresentou resultados satisfatórios para especificações mais apertadas (antenas satelitais).</p>

		Maior número de operações matemáticas (processamento) para a obtenção da solução.
Função Abertura Linear	<p>Maior simplicidade de construção.</p> <p>Necessidade de menos elementos de antena para produzir o mesmo resultado.</p> <p>Dado a maior simplicidade de construção e o menor número de elementos no conjunto, menor custo de fabricação.</p> <p>Método mais simples de ser utilizado (menor processamento para a obtenção da solução).</p>	<p>A solução é menos resistente a degradação de elementos do sistema (descasamento das direções de máxima irradiação entre as antenas de transmissão e recepção).</p> <p>Por irradiar mais energia para fora da região de interesse, mais chance de causar interferências em sistemas adjacentes.</p>

A interação entre os dois campos de estudo, vai além, por exemplo, para resolver o problema de descasamento entre os máximos de transmissão e recepção, é possível construir um circuito controlador para de acordo com parâmetros recebidos de uma das antenas, ajustar a posição do máximo da outra, utilizando a teoria de processamento de sinais. Com isso, outro importante objetivo deste trabalho, que era aprofundar a questão da interdisciplinaridade, também foi alcançado.

## 6.2. Trabalhos Futuros

Este trabalho pode servir de base para duas linhas diferentes de trabalhos futuros. O estudo de diferentes técnicas de síntese de antenas utilizando a teoria de processamento de sinais e o estudo das diferentes aplicações de processamento de sinais em sistemas de antenas.

Outras técnicas de síntese podem ser estudadas mais profundamente tomando como base a metodologia seguida neste presente trabalho. Uma destas técnicas é o método de abertura *staircase*, já que foi dada ênfase ao método da abertura linear. Outros métodos podem ser estudados e desenvolvidos, como

métodos baseados na teoria da construção de filtros IIR ou outros métodos baseados na teoria da construção de filtros FIR com base no que foi estudado aqui.

Outra linha de estudo muito interessante é a aplicação de diferentes teorias de processamento de sinais em sistemas de antena. Por exemplo, a criação de um circuito de controle para ajustar a direção de máxima irradiação da antena de transmissão, em caso de descasamento com a direção de máxima irradiação da antena de recepção.

A adição de circuitos de controle, ou em outras palavras, de inteligência aos sistemas de antenas é o conceito básico da teoria de Antenas Inteligentes. Antenas Inteligentes são capazes de fazer controle de potência, direção de máxima irradiação, faixa de frequência de operação ou outros parâmetros quaisquer, de acordo com as medições feitas pelo sistema. Elas têm larga aplicação, como por exemplo, em sistemas de radar. A antena pode acompanhar um alvo localizado no radar através do controle de máxima irradiação que vai sendo ajustado dinamicamente de acordo com as medições feitas ao longo do tempo.

## Referências Bibliográficas

- [1] Antena – Wikipédia, a enciclopédia livre,  
*<http://pt.wikipedia.org/wiki/Antena/>*.
- [2] Phased Array – Wikipedia, the free encyclopedia,  
*[http://en.wikipedia.org/wiki/Phased\\_array](http://en.wikipedia.org/wiki/Phased_array)*.
- [3] LOCKWOOD, Geoffrey R. *Optimizing the Radiation Pattern of Sparse Periodic Two-Dimensional Arrays*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, Vol. 43, N°. 1, January 1996.
- [4] BALANIS, Constantine A. *Antenna Theory: Analysis and Design*. 3<sup>rd</sup> Edição, Ed. LTC, 2005.
- [5] MITRA, Sanjit K. *Digital Signal Processing: A Computer Based Approach*. 3<sup>rd</sup> Edição, The McGraw-Hill Companies, Inc., 2006.
- [6] Ma, M. T. *Theory and Application of Antenna Arrays*. New York, Wiley, 1974
- [7] MITRA, Sanjit K.; TCHOBANOU, Mikhail K.; DOLECEK, Gordana Jovanovic-. *A Simple Approach to the Design of One-Dimensional Sparse Arrays*. In ISCAS 2004.
- [8] ROSARIO, Julio C. S.; GUIMARÃES, Leonardo G.; NETO, Luiz A. *Síntese de Conjuntos Lineares de Antenas Aplicada a Radars de Busca e Acompanhamento*. Projeto Final apresentado a Universidade Federal Fluminense, 2007.
- [9] RUSCHEL, Orlando T. *Princípios da Comunicação Digital*. EDIPUCRS, 1995.

- [10] COLLIN, Robert. *Antennas and Radiowave Propagation*. McGraw-Hill International Editions, 1985.
- [11] MITRA, Sanjit K.; TCHOBANOU, Mikhail K.; DOLECEK, Gordana Jovanovic-. *On the Design of One-Dimensional Sparse Arrays With Apodized End Elements*. EUSIPCO, 2004.
- [12] Métodos Numéricos e Estatística,  
<http://www2.mat.ua.pt/disciplinas/mne/Documentos/Interpola%C3%A7%C3%A3o.pdf>.
- [13] Interpolação Polinomial de Lagrange,  
<http://www2.dem.inpe.br/mcr/Inpe/CMC-203-0/pdf/Flaviane.pdf>.
- [14] Lecture 3, Earth Segment, <http://www.satcom.co.uk/article.asp?article=5>.
- [15] ALENCAR, Marcelo Sampaio de. *Telefonia Celular Digital*. 1º Edição, Editora Érica Ltda, 2004
- [16] Franz, Luciano Valente. *Antenas, Cabos e Rádio-Enlace*.  
[http://professores.unisantabr/santana/downloads%5CTelecom%5CSistemas\\_Telecom%5CRadio%5CCurso%20de%20Antenas.pdf](http://professores.unisantabr/santana/downloads%5CTelecom%5CSistemas_Telecom%5CRadio%5CCurso%20de%20Antenas.pdf)
- [17] LATHI, B. P. *Sistemas de Comunicação*. 2º Edição, Editora Guanabara Dois S.A., 1983
- [18] Estabilidade,  
<http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node11.html>
- [19] BALANIS, Constantine A; IOANNIDES, Panayiotis. *Introduction to Smart Antennas*. 1<sup>rd</sup> Edition, Morgan & Claypool Publishers' series, 2007.